

# Влияние плазменной неоднородности на процесс нелинейного поглощения альфвеновской волны диссипативной плазмой с учётом фоторекомбинационного излучения

М.Б. Гавриков<sup>1,2</sup>, А.А. Таюрский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл. 4, Москва, Россия, 125047

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская 5, стр. 1, Москва, Россия, 105005

**Аннотация.** В работе проведено исследование процесса нелинейного затухания альфвеновской волны в неоднородной несжимаемой диссипативной плазме. Показано, что учёт излучений, в том числе тормозного и фоторекомбинационного излучений, приводит к конечности глубины проникания альфвеновской волны в диссипативную плазму и появлению установившегося квазистационарного режима поглощения. Учёт синхротронного излучения влияет незначительно. Рассмотрены неоднородности по плотности, распределённые по гауссову закону, двух типов – вершина и впадина. Получены зависимости глубины проникания альфвеновской волны и максимальных температур электронов и ионов от величины вершины.

## 1. Введение

Как известно [1], в магнитогидродинамической плазме допускаются поперечные синусоидальные колебания, которые распространяются вдоль магнитного поля, при этом термодинамические параметры и продольные компоненты векторных величин остаются невозмущёнными. Такие волны впервые были обнаружены Х. Альфвеном [2] в 1942 г. и получили название альфвеновских. К настоящему исследованию привело предположение [3] о том, что за разогрев солнечной короны до нескольких миллионов градусов ответственно затухание альфвеновских волн, образующихся в нижних значительно более холодных солнечных слоях с температурой порядка нескольких тысяч градусов.

Данная работа является продолжением цикла исследований затухания альфвеновской волны в диссипативной плазме [4–12] вследствие диссипативных факторов: гидродинамические вязкости и теплопроводности электронов и ионов, магнитная вязкость, теплообмен между плазменными компонентами, а также тормозное, синхротронное и фоторекомбинационное излучение. Плазма предполагается полностью ионизованной, квазинейтральной, состоящей из электронов и ионов. Исследование динамики электронов и ионов проводилось при помощи уравнений электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы [13].

Дополнительно учитывалась неоднородность плазмы по плотности, что и составляло суть исследования. Как влияет неоднородность плазмы по плотности на процесс поглощения

альфвеновской волны диссипативной плазмой с дополнительным учётом фоторекombинационного излучения? Ранее было исследовано влияние неоднородности при учёте только тормозного излучения [10,11]. Теперь же с тормозным дополнительно учитывается фоторекombинационное излучение, которые связаны соотношением [12,14]

$$\frac{P_{\text{фр}}}{P_{\text{T}}} = \frac{3.33 \cdot 10^3 Z^2}{T_{\text{T}} \text{ (град)}}. \quad (1)$$

В данной работе рассматривались температуры в несколько тысяч градусов, поэтому, как показано в [12], для связи фоторекombинационного и тормозного излучений используется соотношение (1). Также, в работе [12] показано, что синхротронным излучением можно пренебречь. Ниже неоднородность определяется гауссовым распределением  $\rho(x)/\rho_0 = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$ ,  $D > 0$ ,  $x_0 > 0$ . Для  $A > 0$  функция  $\rho(x)$  задаёт неоднородность типа вершины, а для  $0 > A > -1$  – типа впадины. Все остальные возможные неоднородности, как показано в [10,11], являются комбинацией всевозможных указанных гауссовых распределений.

## 2. Основные уравнения

Для исследования динамики электронов и ионов используются уравнения несжимаемой электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) [13]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = \operatorname{Div} \mathbf{P}, \\ \mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Тензоры плотности потока импульса  $\Pi$ , вязких напряжений  $\mathbf{P}$  и “холловских слагаемых”  $\mathbf{W}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi^{\text{h}} + \Pi^{\text{p}} + \Pi^{\text{c}}, \quad \mathbf{P} = \Pi_*^{(\text{c})} + \Pi^{(\text{U})}, \\ \mathbf{W} = (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^{\text{p}} + \Pi^{\text{c}}) + (\lambda_- \rho_+ - \lambda_+ \rho_-) I_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_*^{(\text{U})} - \Pi^{(\text{c})}, \\ \Pi^{\text{h}} = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_{\Sigma} I_3, \quad \Pi^{\text{p}} = \frac{H^2}{8\pi} I_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^{\text{c}} = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее индексы  $\pm$  относятся к параметрам ионов и электрон  $\lambda_{\pm} = m_{\pm}/e_{\pm}$ ,  $\lambda_{\Sigma} = \lambda_+ + \lambda_-$ ,  $p_{\Sigma} = p_+ + p_-$ ,  $m_{\Sigma} = m_+ + m_-$ ,  $\rho = \rho_+ + \rho_-$ ,  $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$ ,  $I_3$  – единичный трёхмерный тензор,  $\sigma$  – проводимость плазмы. Тензоры вязких напряжений с учётом несжимаемости плазмы равны:

$$\begin{aligned} \Pi^{(\text{U})} = 2\mu_{\Sigma} \mathbf{D}^{\text{U}}, \quad \Pi_*^{(\text{U})} = 2\mu_* \mathbf{D}^{\text{U}}, \quad \Pi^{(\text{c})} = 2\mu^* \mathbf{D}^{\text{c}} - (2/3) \mu^* \mathbf{j} \cdot \nabla (1/\rho) I_3, \\ \Pi_*^{(\text{c})} = 2\mu_* \mathbf{D}^{\text{c}} - (2/3) \mu_* \mathbf{j} \cdot \nabla (1/\rho) I_3, \quad \Pi_{\pm} = 2\mu_{\pm} \mathbf{D}_{\pm} \mp (2/3) \mu_{\pm} \lambda_{\pm} \mathbf{j} \cdot \nabla (1/\rho) I_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{D}^{\text{U}} = \operatorname{def} \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{D}^{\text{c}} = \operatorname{def}(\mathbf{j} / \rho)$ ,  $\mathbf{D}_{\pm} = \operatorname{def} \mathbf{v}_{\pm}$  – тензоры деформаций,  $\mu_{\Sigma} = \mu_+ + \mu_-$ ,  $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$ ,  $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$ ,  $\mu_{\pm}$  – гидродинамические вязкости электронов и ионов. При этом вторые вязкости электронов и ионов считаются равными нулю. Для плоских течений, которые рассматриваются ниже,  $\mathbf{j} \cdot \nabla (1/\rho) = 0$  и выражения (4) сильно упрощаются. Учитывая зависимость (см. ниже)  $\sigma$ ,  $\mu_{\pm}$  и других коэффициентов переноса от температур электронов и ионов  $T_{\pm}$ , систему (2)–(4) необходимо дополнить уравнениями для температур [15]

$$\rho_{\pm} c_{\text{p}}^{\pm} \left[ \frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T_{\pm} \right] = \operatorname{div} (\chi_{\pm} \nabla T_{\pm}) + \operatorname{tr} (\Pi_{\pm} \mathbf{D}_{\pm}) + \frac{m_{\mp} j^2}{m_{\Sigma} \sigma} \pm b (T_- - T_+) - p^{\pm}, \quad (5)$$

где  $p^\pm = p_T^\pm + p_{\text{фр}}^\pm + p_c^\pm$ ,  $c_p = T(\partial S / \partial T)_p$  – теплоёмкость при постоянном давлении,  $\chi_\pm$  – теплопроводности электронов и ионов,  $\pm b(T_- - T_+)$  – тепло, передаваемое компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях,  $p_T^\pm$ ,  $p_{\text{фр}}^\pm$ ,  $p_c^\pm$  – потери на тормозное, фоторекомбинационное и синхротронное излучения электронов и ионов. Для идеального политропного газа с общим показателем адиабаты  $\gamma$  имеем  $c_p = k_B / ((\gamma - 1)m) = \text{const}$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m$  – масса частицы газа. Именно этим случаем мы ниже ограничимся, считая  $c_p^\pm = k_B / ((\gamma - 1)m_\pm)$ .

При этом надо учесть выражения гидродинамических параметров электронов и ионов через  $\rho$ ,  $U$ ,  $j$ :  $v_\pm = U \pm (\lambda_\mp / \rho)j$ ,  $\rho_\pm = (\lambda_\pm / \lambda_\mp)\rho$ . С учётом зависимостей  $\sigma$ ,  $\mu_\pm$ ,  $\chi_\pm$ ,  $b$ ,  $p_T^\pm$  от остальных параметров плазмы, прежде всего температур  $T_\pm$ , уравнения (2)–(5) образуют замкнутую определённую систему уравнений относительно  $\rho$ ,  $p_\pm$ ,  $T_\pm$ ,  $U$ ,  $H$ ,  $E$ .

Коэффициенты переноса  $\mu_\pm$ ,  $\chi_\pm$ ,  $\sigma$ ,  $b$  получаются приближённым решением кинетических уравнений [16] и для  $Z = 1$  считаются равными [15-21]

$$\mu_+ = 3.44 \cdot 10^{-18} \left( \frac{m_+}{m_-} \right)^{1/2} T_+^{5/2}, \mu_- = 1.857 \cdot 10^{-18} T_-^{5/2}, \sigma = 0.906 \cdot 10^7 T_-^{3/2}, b = 1.353 \cdot 10^{40} \left( \frac{m_-}{m_+} \right)^3 \frac{\rho^2}{T_-^{3/2}},$$

$$\chi_- = 0.244 \cdot 10^{-5} T_-^{5/2}, \chi_+ = 0.429 \cdot 10^{-5} \left( \frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} T_+^{5/2}, p_T^- = 6.777 \cdot 10^{-21} n_+ n_- T_-^{1/2}, p_c^- = \frac{4}{3} \frac{k_B e^4}{m_-^3 c^5} H^2 T_- n_- \Phi,$$

где  $p_T^+ = p_{\text{фр}}^+ = p_c^+ = 0$ ,  $T_\pm$  вычисляются в Кельвинах,  $p_T^-$ ,  $p_c^-$  – в эрг / (с · см<sup>3</sup>),  $\Phi$  – “форм-фактор” [12], а  $p_{\text{фр}}^- / p_T^-$  вычисляется по формулам (1).

Более подробные формулы для диссипативных коэффициентов см. в [13].

### 3. Альфвеновские волны в ЭМГД

В бездиссипативном случае и плоской геометрии ЭМГД-уравнения имеют точные решения вида [4]

$$U_\perp = u(t)e^{ikx}, H_\perp = h(t)e^{ikx}, E_\perp = e(t)e^{ikx}, T_\pm = \text{const}, \rho = \text{const}, U_x = 0, \quad (6)$$

которые называются *плоскими альфвеновскими волнами*. В (6)  $\kappa > 0$  – произвольное и использованы комплексные обозначения  $U_\perp = U_y + iU_z$ ,  $H_\perp = H_y + iH_z$ ,  $E_\perp = E_y + iE_z$ . При этом  $H_x = \text{const}$ , а  $e(t)$  выражается явно через  $u(t)$  и  $h(t)$  [13]. Функции  $u(t)$ ,  $h(t)$  имеют вид:

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad h(t) = (4\pi\rho)^{1/2} (\kappa v_A)^{-1} \{ C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t} \}. \quad (7)$$

Здесь  $C_1$ ,  $C_2$  – произвольные комплексные константы. Поперечная компонента плотности тока  $j_\perp = j_y + ij_z$  также изменяется по закону  $j_\perp = j(t)\exp(ikx)$ , а  $j_x = 0$ , где  $j(t) = -\kappa c / (4\pi) \cdot h(t)$ .

$$\omega_\pm = \omega_\pm(\kappa) = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{rA}{1+r^2} \pm \left[ \frac{r^2 A^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}, r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, A = \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}, v_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (8)$$

Обратная к формуле (8):

$$\kappa = \kappa(\omega) = \omega_p c^{-1} \cdot \left| \omega \left[ (v_A^2 \omega_p^2 c^{-2} + \omega_p v_A c^{-1} A \omega - \omega^2) \right]^{-1/2} \right|, \omega_p = (4\pi\rho)^{1/2} (\lambda_+ \lambda_-)^{-1/2}, \quad (9)$$

где  $\omega_p$  – плазменная частота,  $-\omega_c^+ < \omega < \omega_c^-$  для  $H_x > 0$  и  $-\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$  для  $H_x < 0$ .

### 4. Постановка задачи

Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая слева направо в области  $x < 0$ , набегаёт на границу  $x = 0$  диссипативной плазмы, заполняющей полупространство  $x > 0$ . Дальнейшее

распространение альфвеновской волны в области  $x > 0$  сопряжено с её поглощением, которое и является предметом изучения. Из результатов предыдущего пункта следует, что если продольное магнитное поле  $H_x < 0$ , то частота набегающей альфвеновской волны  $\omega$  меняется в диапазоне  $-\omega_c^- = H_x / (\lambda_- c) < \omega < 0$ , а если  $H_x > 0$  – то в диапазоне  $-\omega_c^+ = -H_x / (\lambda_+ c) < \omega < 0$ . Ниже рассматривается первый случай. Плазма в области  $x \geq 0$  считается замагниченной покоящейся изотермической с заданным распределением плотности  $\rho(x)$ . Таким образом, в начальный момент времени в области  $x > 0$  имеем:

$$U_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad U_x|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \rho(x), \quad H_{\perp}|_{t=0} = 0,$$

где распределение плотности  $\rho(x)$  имеет при  $x \rightarrow +\infty$  конечный предел  $\rho > 0$ , причём константа  $\rho$  и продольное магнитное поле  $H_x = \text{const}$  такие же, как и в области  $x \leq 0$ , откуда набегающая альфвеновская волна.

Значения параметров диссипативной плазмы на границе  $x = 0$  совпадают со значениями на границе  $x = 0$  параметров альфвеновской волны, которые, согласно формулам (6)–(9), равны:

$$U_{\perp}|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H_{\perp}|_{x=0} = U_0 \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{\kappa v_A} \omega e^{i\omega t},$$

$$E_{\perp}|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + (\kappa c / \omega_p)^2} \left( \frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega \right) e^{i\omega t}, \quad j_{\perp}|_{x=0} = -U_0 \frac{\omega c \rho}{H_x} e^{i\omega t}.$$

На бесконечности параметры диссипативной плазмы совпадают с параметрами невозмущённой плазмы:

$$U_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad H_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0, \quad E_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad j_{\perp}|_{x=+\infty} = 0.$$

Запишем систему (2)–(5) в безразмерном виде в случае плоской симметрии ( $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ ), используя обозначения  $U = U_{\perp}$ ,  $H = H_{\perp}$ ,  $E = E_{\perp}$ ,  $j = j_{\perp}$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H_x H - \mu_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad j = i \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$E - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \xi \zeta \frac{j}{\sigma} + i H_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Lambda H_x H - \mu_* \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} = \frac{2Z_{\pm}(\gamma - 1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_{\pm} \frac{\partial T_{\pm}}{\partial x} \right) + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\xi \zeta}{\sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{\mp} - T_{\pm}}{T_{\pm}^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{T_{\pm}^{5/2}}{R_{\pm}} \left[ \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \text{Re} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial j}{\partial x} \right) \right] \right\} - \frac{(1 \mp 1) \xi_T}{4 \xi} (\gamma - 1) Z_{\mp}^2 \rho T_{\pm}^{1/2} \left( 1 + \frac{k_r}{T_{\pm}} \right),$$

где  $Z_{\pm} = Z$ ,  $Z_{-} = 1$ ,  $k_r = 3.33$ ,  $\mu_{\Sigma} = \mu_{+} + \mu_{-}$ ,  $\mu_* = (\lambda_{-} / \lambda_{+})^{1/2} \mu_{+} - (\lambda_{+} / \lambda_{-})^{1/2} \mu_{-}$ ,  $\mu^* = (\lambda_{-} / \lambda_{+}) \mu_{+} + (\lambda_{+} / \lambda_{-}) \mu_{-}$ ,  $\mu_{\pm} = T_{\pm}^{5/2} / R_{\pm}$ ,  $\sigma = \sigma_0 T_{\pm}^{3/2}$ ,  $\chi_{\pm} = C_{\pm} (\xi / \zeta) T_{\pm}^{5/2}$ , а  $\sigma_0$ ,  $C_0$ ,  $R_{\pm}$ ,  $C_{\pm}$ :

$$\sigma_0 = 2.59, \quad C_0 = \frac{m_{-}}{m_{+}}, \quad R_{+} = 1.108 \cdot \frac{\zeta}{\xi} \left( \frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^{1/2}, \quad R_{-} = 2.053 \cdot \frac{\zeta}{\xi}, \quad C_{-} = 2.11 \frac{m_{+}}{m_{-}}, \quad C_{+} = 3.7 \left( \frac{m_{+}}{m_{-}} \right)^{1/2}.$$

Наконец,  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\xi_T$  – числа подобия, равные

$$\xi = \frac{\ell_c}{L_0} = \frac{c \sqrt{\lambda_{+} \lambda_{-}}}{\sqrt{4\pi\rho_0} L_0}, \quad \zeta = \frac{(4\pi\rho_0)^{5/2}}{H_0^4} \cdot \frac{c e^3}{m_{+}^2} L Z^3 \left( 1 + Z \frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^{-3/2}, \quad \xi_T = \frac{\rho_0^{3/2}}{H_0^2} \frac{10^7 e^5}{c^2 \hbar m_{+} m_{-}} \frac{64 \sqrt{\pi}}{3^{3/2}} \left( 1 + Z \frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^{-3/2},$$

где  $\ell_c = c / \omega_p$  – скин-длина,  $L_0$ ,  $\rho_0$ ,  $H_0$  и т.д. – характерные масштабы длины плотности, напряжённости магнитного поля и т.д. При обезразмеривании считалось  $t_0 = L_0 / v_0$ ,  $v_0 = v_A = H_0 / (4\pi\rho_0)$ ,  $E_0 = v_0 H_0 / c$ ,  $j_0 = c H_0 / (4\pi L_0)$ ,  $T_0 = v_A^2 \lambda_2 e / (2k_B)$ .

Итак, требуется решить начально-краевую задачу для системы (10) на полупрямой  $x \geq 0$ : найти функции  $H(t, x)$ ,  $E(t, x)$ ,  $U(t, x)$ ,  $T_{\pm}(t, x)$ , удовлетворяющие для  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$  уравнениям системы (10), при  $t = 0$  – безразмерным начальным условиям

$$U|_{t=0} = 0, \quad H|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad x \geq 0, \quad (11)$$

а при  $x = 0$  и  $x = +\infty$  – безразмерным краевым условиям:

$$U|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H|_{x=0} = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x} e^{i\omega t}, \quad j|_{x=0} = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t}, \quad E|_{x=0} = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega t},$$

$$U|_{x=+\infty} = 0, \quad H|_{x=+\infty} = 0, \quad E|_{x=+\infty} = 0, \quad j|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0, \quad (12)$$

причём при  $H_x > 0$  имеем  $-H_x (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} < \omega \xi < 0$ , при  $H_x < 0$  имеем  $H_x (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega \xi < 0$ . Здесь  $\omega, \rho, H_x \in R$ ,  $U_0 \in C$  – безразмерные параметры задачи и в безразмерном виде

$$\kappa = \kappa(\omega) = |\omega| \sqrt{\rho (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2)^{-1/2}}.$$

## 5. Анализ результатов расчётов

Рассмотрим решение задачи нелинейного поглощения альфвеновской волны с учётом тормозного и фоторекомбинационного излучений и дополнительным учётом неоднородности по плотности применительно к параметрам солнечной короны  $\rho_0 = 10^{-12} \text{ г/см}^3$ ,  $H_0 = 1 \text{ Гс}$ ,  $Z = 1$ , тогда  $\zeta = 3 \cdot 10^3$ ,  $\xi_T = 3$ , а скин-длина  $\ell_c = c / \omega_p \approx 1 \text{ см}$ . Учитывая мелкомасштабные ( $\sim \ell_c$ ) процессы при поглощении альфвеновской волны, положим  $L_0 = \ell_c$ , тогда  $\xi = 1$ , а также оценку толщины плазменной части солнечной короны [8]  $\approx 300 - 400 \text{ км}$ , тем самым учитываем мелкомасштабную динамику плазмы. Для указанных параметров фоновой диссипативной плазмы альфвеновская скорость  $v_A = H_0 / (4\pi\rho_0)^{1/2} = 2.8 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ ,  $t_0 = L_0 / v_A = 3.45 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ ,  $T_0 \approx 10^3 \text{ }^\circ\text{К}$ ,  $k_r = 3.33$ . Дебаевский радиус  $r_D = (kT_0)^{1/2} / (2\pi^{1/2} \rho_0 n_0^{1/2}) \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ см} \ll L_0$  и много меньше шагов использованной разностной сетки, поэтому условие квазинейтральности выполнено с высокой точностью,  $n_0 = \rho_0 / m_+$ ,  $m_+ = 2m_p$ .

Численный метод решения задачи (10)–(12) изложен в работах [11,12].

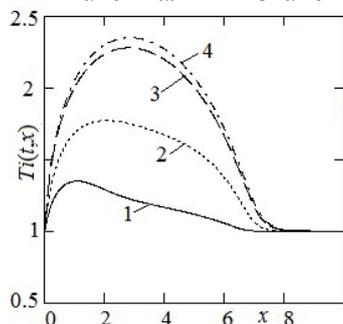
Кроме того, рассматривается фиксированная амплитуда падающей альфвеновской волны  $|U_0| = 0.1$  и считается  $H_x = -1$ . Частота волны  $\omega$  изменяется в диапазоне  $-61 \cong -(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega < 0$ . Вариант однородной плазмы  $\rho(x) \equiv 1$  с тормозным и фоторекомбинационным излучениями был проанализирован в работе [12].

Пусть теперь распределение плотности диссипативной плазмы в области  $x \geq 0$  имеет вершину,  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$ ,  $x_0 = 8$ ,  $D = 1$ ,  $A = 5$ ,  $\omega = -30$ . Как видно из представленных графиков (рисунки 1–4), во-первых, альфвеновская волна, как и в случае с однородной плазмой, проникает в диссипативную плазму на конечную глубину. Во-вторых, параметры альфвеновской волны выходят с течением времени на квазистационарный режим. В частности, происходит стабилизация со временем профилей температур электронов и ионов.

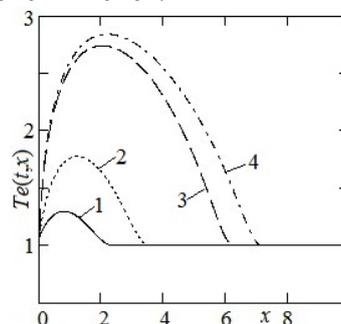
Выделим ещё один момент, что увеличивается скорость процесса установления профиля температуры электронов. В случае тормозного и фоторекомбинационного излучений с учётом неоднородности по плотности на процесс стабилизации затрачено в 40 раз больше времени, чем в случае учёта только тормозного излучения и неоднородности по плотности.

Далее проведём анализ зависимости профилей температур электронов и ионов в зависимости от амплитуды  $A$ . Как видно из рисунков 5, 6 в случае вершины ( $A = 5$ ) наблюдается уменьшение глубины прогрева плазмы и максимальной температуры ионов по сравнению с  $A = 0$  как и в случае поглощения альфвеновской волны, в котором учитывается неоднородность плазмы и только тормозное излучение [10,11]. Максимальная температура электронов же теперь возрастает. В случае впадины ( $A = -0.8$ , рисунок 5, 6) происходит также

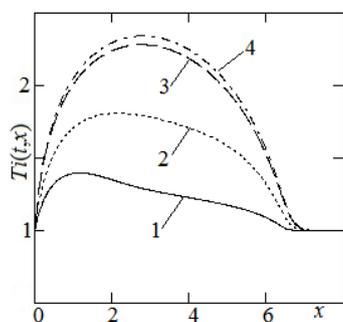
увеличение глубины прогрева, но уменьшение максимальных температур электронов и ионов в по сравнению с поглощением альфвеновской волны, где учитывается неоднородность плазмы и только тормозное излучение. Ещё одно отличие это снижение примерно на 10% глубины проникания и максимальных значений температур электронов и ионов.



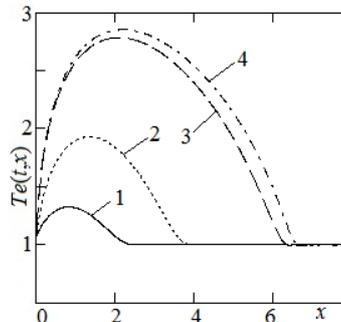
**Рисунок 1.** Процесс установления профилей температур ионов с течением времени для однородной плазмы  $\rho(x) = 1$ ,  $\omega = -30$ :  
 $1 - t = 8$ ,  $2 - t = 11$ ,  $3 - t = 20$ ,  $4 - t = 36$ .



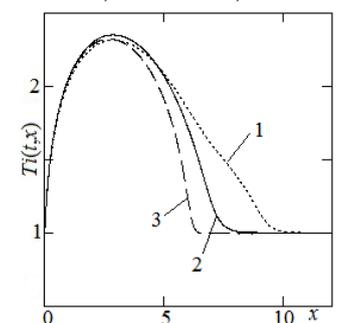
**Рисунок 2.** Процесс установления профилей температур электронов с течением времени для однородной плазмы  $\rho(x) = 1$ ,  $\omega = -30$ :  
 $1 - t = 6.4$ ,  $2 - t = 7$ ,  $3 - t = 7.6$ ,  $4 - t = 36$ .



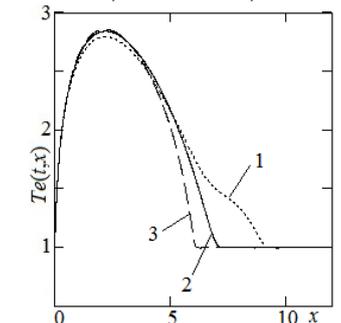
**Рисунок 3.** Процесс установления профилей температур ионов с течением времени для неоднородности плотности типа вершина  $\rho(x) = 1 + 5 \exp[-(x - 8)^2]$ ,  $\omega = -30$ :  $1 - t = 8$ ,  
 $2 - t = 11$ ,  $3 - t = 20$ ,  $4 - t = 36$ .



**Рисунок 4.** Процесс установления профилей температур электронов с течением времени для неоднородности плотности типа вершина  $\rho(x) = 1 + 5 \exp[-(x - 8)^2]$ ,  $\omega = -30$ :  $1 - t = 6.2$ ,  
 $2 - t = 6.8$ ,  $3 - t = 7.4$ ,  $4 - t = 36$ .



**Рисунок 5.** Зависимость установившихся профилей температур ионов в зависимости от  $A$  для неоднородности по плотности  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - 8)^2]$ ,  $\omega = -30$ :  
 $1 - A = -0.8$  (впадина),  $2 - A = 0$ ,  $3 - A = 50$  (вершина).



**Рисунок 6.** Зависимость установившихся профилей температур электронов в зависимости от  $A$  для неоднородности по плотности  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - 8)^2]$ ,  $\omega = -30$ :  
 $1 - A = -0.8$  (впадина),  $2 - A = 0$ ,  $3 - A = 50$  (вершина).

Проведённый анализ позволяет сделать вывод, что с уменьшением высоты вершины  $A$  глубина проникания  $d$  альфвеновской волны будет возрастать, а максимальные температуры ионов – увеличиваться, максимальные температуры же электронов – уменьшаться. Этот вывод

подтверждается результатами, полученными численно для неоднородности вида  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$  с различными  $A$  и приведёнными в таблице 1.

**Таблица 1.** Зависимость глубины проникания  $d$  и максимальных температур электронов и ионов альфвеновской волны от амплитуды  $A$ .

$A$	100	50	25	10	5	2	1	0
$d$	6.1	6.3	6.5	6.7	6.9	7.1	7.4	7.9
$T_+$	2.31	2.32	2.33	2.33	2.34	2.34	2.34	2.35
$T_-$	2.86	2.86	2.86	2.85	2.85	2.85	2.84	2.84

## 6. Заключение

Плазменные неоднородности плотности и тормозное и фоторекомбинационное излучения существенно влияют на глубину проникания альфвеновской волны и степень прогрева электронов и ионов диссипативной плазмы. Точнее, неоднородности плотности типа вершины тормозят прохождение альфвеновской волны, уменьшая глубину проникания волны и степень прогрева ионов диссипативной плазмой, степень прогрева электронов увеличивается. А неоднородность типа впадины увеличивает глубину проникания волны. Степень прогрева электронов и ионов уменьшается.

## 7. Литература

- [1] Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Наука, 1982. – 620 с.
- [2] Альфвен, Х. Космическая электродинамика – М.: ИЛ, 1952.
- [3] McIntosh, S.W. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind / S.W. McIntosh, B.P. Pontien, M. Carlsson, V. Hansteen, P. Boerner, M. Goossens // Nature. – 2011. – Vol. 475. – P. 478-480.
- [4] Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме / М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 8. – С. 65-79.
- [5] Nonlinear absorption of Alfvén wave in dissipative plasma / A.A. Taiurskii, M.B. Gavrikov // AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1684. – P. 070009. DOI: 10.1063/1.4934310.
- [6] Taiurskii, A.A. Spatial Nonlinear Absorption of Alfvén Waves by Dissipative Plasma Taking Account Bremsstrahlung / A.A. Taiurskii, M.B. Gavrikov // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1773. – P. 090003. DOI: 10.1063/1.4964994.
- [7] Gavrikov, M.B. Alfvén wave absorption in dissipative plasma / M.B. Gavrikov, A.A. Taiurskii // Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – Vol. 788. – P. 012015. DOI:10.1088/1742-6596/788/1/012015.
- [8] Гавриков, М.Б. Пространственное нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой / М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 40-59. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59.
- [9] Nonlinear Spatial Absorption of Alfvén Waves by Dissipative Plasma / M.B. Gavrikov, A.A. Taiurskii // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 927. – P. 012020. DOI: 10.1088/1742-6596/927/1/012020.
- [10] Gavrikov, M.B. The Influence of Plasma Inhomogeneity and Incident Wave Frequency on the Nonlinear Spatial Absorption of Alfvén Waves In Dissipative Plasma / M.B. Gavrikov, A.A. Taiurskii // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 937. – P. 012014. DOI: 10.1088/1742-6596/937/1/012014.
- [11] Гавриков, М.Б. Влияние плазменной неоднородности и частоты альфвеновской волны на её нелинейное пространственное поглощение диссипативной плазмой / М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2018. – № 3. – С. 82-96. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-82-96.

- [12] Гавриков, М.Б. Влияние синхротронного и фоторекомбинационного излучений на поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой / М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский // Математическое моделирование. – 2019. – Т. 31, № 12. – С. 71-85. DOI: 10.1134/S0234087919120062.
- [13] Гавриков, М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика – М.: КРАСАНД, 2018. – 584 с.
- [14] Морозов, А.И. Введение в плазмодинамику – М.: Физматлит, 2006. – 576 с.
- [15] Чукбар, К.В. Лекции по явлениям переноса в плазме – Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2008. – 256 с.
- [16] Брагинский, С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы – М.: Госатомиздат, 1963. – Вып. 1. – С. 183-272.
- [17] Спитцер, Л. Физика полностью ионизованного газа – М.: Мир, 1965. – 212 с.
- [18] Чэпмен, С. Математическая теория неоднородных газов / С. Чэпмен, Т. Каулинг – М.: ИЛ, 1960.
- [19] Имшенник, В.С. *Астрономический журнал*. – 1961. – Т. 38. – С. 652.
- [20] Ландау, Л.Д. *ЖЭТФ*. – 1937. – № 7. – С. 203.
- [21] Грим, Г. Процессы излучения в плазме // *Основы физики плазмы*. Т. 1 – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 641 с.

## **Influence of plasma inhomogeneity on process of Alfvén wave nonlinear absorption by dissipative plasma with photorecombination radiation**

**M.B. Gavrikov<sup>1,2</sup>, A.A. Taiurskii<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Miusskaya sq. 4, Moscow, Russia, 125047

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya 5, Moscow, Russia, 105005

**Abstract.** The Process of the nonlinear absorption of Alfvén wave in an inhomogeneous incompressible dissipative plasma is investigated in the paper. It is shown that accounting for radiations, including bremsstrahlung and photorecombination radiation, leads to the finiteness of the penetration depth of the Alfvén wave into a dissipative plasma and to the appearance of a steady quasistationary absorption regime. Accounting for synchrotron radiation affects slightly. Density inhomogeneities distributed over a Gaussian law of two types-the hump and hollows-are considered. Dependences of the depth of penetration of the Alfvén wave and the maximum values of the temperatures of electrons and ions on the value of the hump are obtained.