Условия потери устойчивости для многообразия стационарных состояний в модели спутника, стабилизируемого вращением

В.А. Соболев[a], Е.А. Щепакина[a]

[a] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия*

Аннотация

Рассматривается задача о стабилизации спутника с двойным вращением при помощи демпферов поступательного типа. Применение метода интегральных многообразий позволяет найти условия потери устойчивости в аналитическом виде.

Ключевые слова: устойчивость; стабилизация; многообразие стационарных состояний; спутник с двойным вращением

1. Введение

Исследованию динамических моделей стабилизации спутников при помощи гироскопических сил посвящено много работ. В качестве основного аппарата используется метод функций Ляпунова и критерии устойчивости, применяемые к системам первого приближения. Помимо гироскопических сил для стабилизации в ряде моделей применяются демпфирующие устройства, призванные обеспечить асимптотическую устойчивость требуемых режимов движения спутников. В ряде работ в качестве таких устройств рассматриваются пассивные демпферы поступательного типа. Для случая двух соосных тел, на каждом из которых установлен один демпфер, задача стабилизации рассматривалась, например, в работах [1-3]. В данной работе мы ограничиваемся исследованием модели спутника, состоящего из двух тел, на одном из которых установлен демпфер с относительно малым коэффициентом вязкого трения. Демпфер моделируется частицей относительно небольшой массы, помещенной в трубку, заполненную вязкой жидкостью и прикрепленной пружиной. Для анализа системы дифференциальных уравнений применяется метод интегральных многообразий [3, 4], позволяющий существенно понизить размерность модели и упростить анализ.

2. Уравнения движения

Для исследования условий и механизма потери устойчивости для спутника, стабилизируемого вращением рассмотрим динамическую модель, которая представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для безразмерных переменных и параметров вида [3]:

$$q\dot{\omega} - \varepsilon\dot{x}_1 = \varepsilon[2x_1 v_1 - \omega x_2 u_1],$$

$$[1-2Lu_1]\dot{x}_1 - \varepsilon u_2\dot{\omega} =$$

$$= -\Lambda x_2 + \varepsilon[-u_1 2L\omega x_2 + \varepsilon x_1 x_2 u_1 + 2Lx_1 v_1],$$

$$[1-2Lu_1]\dot{x}_2 - \varepsilon\dot{v}_1 = \Lambda x_1 + \varepsilon[\omega^2 u_1 - 2Lu_1\omega x_1 + 2Lx_2 v_1 - \varepsilon x_1^2 u_1]$$

$$\dot{u}_1 = v_1,$$

$$-\varepsilon\dot{x}_2 + \varepsilon(1-\varepsilon\rho_1)\dot{v}_1 =$$

$$= -K_1 u_1 - \varepsilon\beta_1 v_1 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)(u_1 - L) - \varepsilon\omega x_1.$$

Переменные ω, x_1, x_2 играют роль проекций абсолютной угловой скорости основного тела на оси связанной с ним системы координат с началом отсчета в центре масс этого тела. Переменная u_1 характеризует отклонение частицы, движущейся внутри демпфера, от номинального положения. В этих уравнениях опущены нелинейные члены, содержащие множителями $\varepsilon^2 u_1$. Величина ε, которая характеризует момент инерции движущейся в демпфере массы, играет роль малого параметра. Подробности можно найти в книге [5].

3. Многообразие стационарных состояний

Рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет многообразие стационарных состояний:

$$\mathfrak{M} = \{\omega = \Omega = const, \qquad x_1 = x_2 = u_1 = v_1 = 0\}.$$

Следуя [6], будем говорить, что это многообразие устойчиво по отношению к переменным

$$x_1, x_2, u_1, v_1,$$

если для любой точки $\omega = \Omega$ и любой окрестности нуля W пространства переменных x_1, x_2, u_1, v_1 можно указать такую окрестность нуля W_0 этого пространства, что для любой точки из этой окрестности соответствующее решение принадлежит W при $t \geq 0$.

Будем говорить, что $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво по отношению к переменным

$$x_1, x_2, u_1, v_1,$$

если оно устойчиво по отношению к этим переменным и, кроме этого, переменные x_1, x_2, u_1, v_1стремятся к нулю при неограниченном возрастании t.

Будем говорить, что $\mathfrak{M}$ стабилизируемо, если оно асимптотически устойчиво по отношению к переменным x_1, x_2, u_1, v_1 и при $t \to \infty$ решение стремится к некоторой точке многообразия $\mathfrak{M}$.

Из результатов работ [5, 6] следует, что многообразие стационарных состояний $\mathfrak{M}$ стабилизируемо, если все корни характеристического уравнения, кроме одного нулевого корня, имеют отрицательные действительные части. Всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при $t \to \infty$ к одному из возможных установившихся движений, принадлежащих указанному многообразию

4. Редукция модели

Рассматриваемая дифференциальная система является сингулярно возмущенной и имеет трехмерное многообразие медленных движений:

$$u_1 = \varepsilon f(\omega, x_1, x_2), \qquad v_1 = \varepsilon g(\omega, x_1, x_2),$$

движение по которому описывается системой трех скалярных дифференциальных уравнений вида

$$q\dot{\omega} = \varepsilon[2x_1\, g - (\Lambda + \omega)x_2 f]\ ,$$

$$\dot{x_1} = -\Lambda x_2 + \varepsilon[x_2\big(x_2 - 2L\omega(\Lambda + \omega)\big) + f + 2Lx_1\, g],$$

$$\dot{x_2} = \Lambda x_1 + \varepsilon[(-K_1 f - x_1(x_1 - 2L\omega(\Lambda + \omega)x_2)f + x_1^2 + x_2^2 - (1 + \rho_1)K_1 + \omega^2)f +$$

$$(-\beta_1 + 2Lx_2)g + (\Lambda - \omega)x_1 - L(x_1^2 + x_2^2)] +$$

$$\varepsilon^2\{[\omega^2 - (1 + \rho_1)^2 K_1]f - (1 + \rho_1)\beta_1 g + (1 + \rho_1)\omega x_1 - (1 + \rho_1)(x_1^2 + x_2^2)\} + \varepsilon^3(1 + \rho_1)^2(\Lambda - \omega)x_1.$$

Функции f, g вычисляются обычным образом [5]. Ограничиваясь линейными по x_1, x_2 членами до третьего порядкка и нелинейными – до второго порядка по ε включительно, запишем уравнения движения по интегральному многообразию в форме

$$q\dot{\omega} = \frac{\varepsilon^2}{K_1}[-(\Lambda - \omega)(3\Lambda + \omega)x_2 x_1\ + (\Lambda + \omega)Lx_2(x_1^2 + x_2^2)]\ ,$$

$$\dot{x_1} = -\Lambda x_2 + \frac{\varepsilon^2}{K_1}[(\Lambda - \omega)x_1^2 x_2 - 2L(\Lambda - \omega)(2\Lambda + \omega)x_2 x_1\ +$$

$$2L^2(\Lambda + \omega)x_2(x_1^2 + x_2^2) - Lx_1\, x_2 x_1\,(x_1^2 + x_2^2)],$$

$$\dot{x_2} = \Lambda x_1 + \varepsilon^2[-\frac{1}{K_1}(\Lambda + \omega)(\Lambda - \omega)^2(1 - \frac{\varepsilon L^2}{K_1})x_1 - \frac{\varepsilon}{K_1^2}\,(\Lambda(\Lambda + \omega)(\Lambda - \omega)^2 x_2\beta_1) + \frac{1}{K_1}2L(\Lambda - \omega)((\Lambda + \omega)x_1^2\ - \Lambda x_2^2)$$
$$- 2L(\Lambda + \omega)x_1\,(x_1^2 + x_2^2) + L(x_1^2 - \omega^2)(x_1^2 + x_2^2)].$$

После линеаризации уравнений на интегральном многообразии для переменных x_1, x_2 лучим линейную относительно x_1, x_2 подсистему

$$\dot{x_1} = -\Lambda x_2,$$

$$\dot{x_2} = \Lambda x_1 + \varepsilon^2[-\frac{1}{K_1}(\Lambda+\omega)(\Lambda-\omega)^2(1-\frac{\varepsilon L^2}{K_1})x_1 - \frac{\varepsilon}{K_1^2}(\Lambda(\Lambda+\omega)(\Lambda-\omega)^2 x_2 \beta_1)].$$

Условие асимптотической устойчивости по отношению к переменным x_1, x_2 имеет вид

$$-\Lambda(\Lambda+\omega)(\Lambda-\omega)^2 < 0.$$

Для интегрального многообразия медленных движений справедлив принцип сведения, заключающийся в следующем: многообразие стационарных состояний исходной системы устойчиво (неустойчиво, асимптотически устойчиво по отношению к части переменных, стабилизируемо) тогда и только тогда, когда устойчиво (неустойчиво, асимптотически устойчиво по отношению к части переменных, стабилизируемо) многообразие стационарных состояний системы, описывающей движение на интегральном многообразии. Понятно, что нарушение полученного неравенства влечет за собой потерю устойчивости. Это подтверждается и результатами численных экспериментов. На приведенных ниже рисунках можно видеть колебания с нарастающей амплитудой для переменных x_1, x_2 и ω.

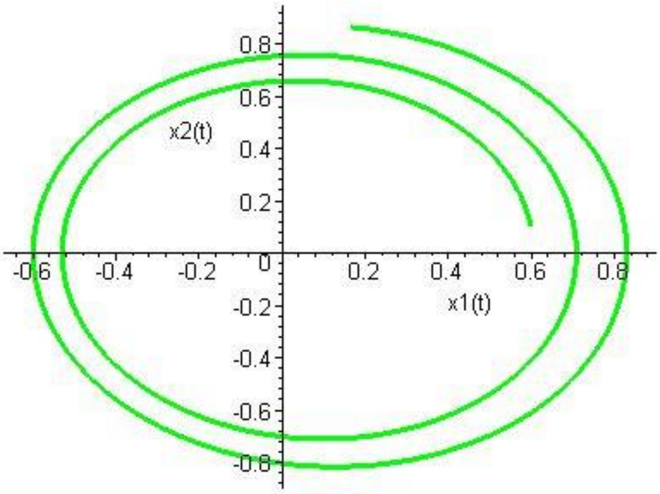

Рис. 1. Проекция траектории на плоскость переменных x_1, x_2 (движение осуществляется против часовой стрелки).

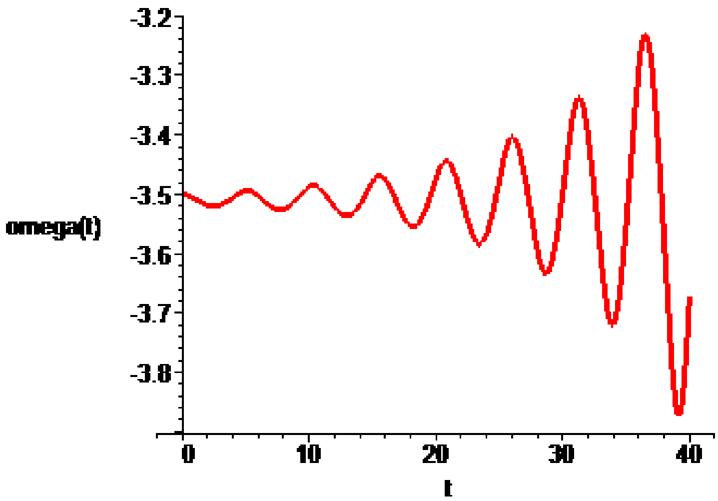

Рис. 2. График решения для переменной ω.

5. Заключение

В настоящей работе методами геометрической теории сингулярных возмущений исследована математическая модель спутника, стабилизируемого вращением. Была проведена редукция системы, в результате которой вместо исходной системы из пяти дифференциальных уравнений была исследована ее проекция на трехмерное медленное интегральное многообразие. Следует отметить, что в силу справедливости принципа сведения для медленного интегрального многообразия редукция осуществлена корректно, и редуцированная система из трех дифференциальных уравнений сохраняет основные качественные свойства исходной модели. Получено неравенство, при нарушении которого спутник теряет требуемую ориентацию в пространстве.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта № 16-41-630524 и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013–2020).

Литература

[1] Teixeira-Filho, D.R. Spin stability of torque free systems. Part I, II / D.R. Teixeira-Filho, D.R. Kane // AIAA Journal. – 1973. – Vol. 11. No 6.– P.862-867.
[2] Mingori, D. Effect of energy dissipation on the attitude stability of dualspin satellites / D. Mingori // AIAA Journal. – 1969. – Vol. 7. No 7.– P.862-867.
[3] Стрыгин, В.В. Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев // Космические исследования. – 1976. – Т. 14. –№ 3. –С. 366-371.
[4] Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике/ В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. – Москва: Физматлит, 2010. – 319 с.
[5] Стрыгин, В.В. Разделение движений методом интегральных многообразий / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. // – Москва: Наука, 1988. – 256 с.
[6] Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Stabilität der Gleichgewichtslage im einem night-holonomen System. //Z. angew. Math, und Mcch.—1957.—B. 37, Nr. 1/2.—P. 74—75.