

Траектории–утки и инвариантные многообразия со сменой устойчивости в модели конкуренции динамики популяций

Е.А. Щепакина¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. На примере модели популяционной динамики рассматривается подход моделирования различных колебаний для одного класса трехмерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. Основной особенностью рассматриваемых систем является наличие точного медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости. Это обстоятельство позволяет модифицировать траекторию трехмерной системы путем изменения формы траекторий ее двумерных проекций. Предлагаемый подход можно рассматривать как эффективный и простой способ моделирования траекторий–уток в трехмерном пространстве.

1. Введение

Работа посвящена подходу, позволяющему эффективно и достаточно просто моделировать различные колебания для некоторого класса трехмерных сингулярно возмущенных систем. Предлагаемый подход основан на геометрической теории инвариантных многообразий [1, 2]. Характерной особенностью рассматриваемых систем является наличие точного медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости. Это обстоятельство позволяет формировать колебания трехмерной системы посредством выбора формы траекторий двух ее двумерных проекций.

Особое внимание в работе уделено колебательным процессам, траектории которых являются траекториями–утками. С этой точки зрения обсуждаемый подход можно рассматривать как новый способ “охоты” на траектории–утки в трехмерном пространстве. Следует отметить, что по сравнению с традиционными методами, этот подход кажется более простым.

Напомним, что термин “утка” первоначально был дан французскими математиками промежуточным периодическим траекториям (между малым, только что возникшим, и релаксационным циклами) уравнения Ван-дер-Поля благодаря их особой форме [3]. Позднее этот объект был изучен для других типов сингулярно возмущенных систем, в том числе систем более высоких размерностей, см., например, [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Согласно геометрической теории сингулярных возмущений траекторию–утку можно рассматривать как результат склеивания устойчивых и неустойчивых медленных инвариантных многообразий в одной точке поверхности срыва. Это возможно из-за наличия дополнительного скалярного параметра в дифференциальной системе. Этот подход был впервые предложен в [15, 16] и затем применен в [7, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

Если устойчивые и неустойчивые медленные инвариантные многообразия склеены во всех точках поверхности срыва одновременно, то в результате возникает непрерывное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости [10, 19, 21, 22]. Во многих случаях такие поверхности целиком состоят из траекторий–уток.

Для демонстрации предлагаемого подхода, рассматривается модель конкуренции динамики популяций. Эта модель интересна еще и тем, что в ней помимо точного медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости, существует возможность построения второго такого многообразия. Это обстоятельство позволяет получить широкий спектр колебаний.

2. Модель конкурирующих хищников

Рассмотрим задачу конкуренции двух видов хищников за одну добычу в условиях постоянной и однородной среды, которая описывается системой [23]

$$\dot{x}_1 = \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - d_1 x_1, \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - d_2 x_2, \tag{2}$$

$$\dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \frac{m_1}{y_1} \frac{x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2}{y_2} \frac{x_2 S}{a_2 + S}. \tag{3}$$

Здесь S — плотность популяции жертвы; для $i = 1, 2$, x_i — безразмерная плотность популяций i -го хищника; $m_i > 0$ — максимальная скорость роста или рождения i -го хищника; $d_i > 0$ — безразмерная скорость смертности i -го хищника; y_i — коэффициент выдачи i -го хищника, питающегося добычей; a_i — безразмерная постоянная полунасыщения для i -го хищника; $\gamma > 0$ — безразмерная величина темпа роста добычи; $K > 0$ — безразмерная величина пропускной способности добычи.

Следуя [24, 25], полагаем, что динамика жертвы является быстрой по сравнению с динамикой хищников. Введем новые переменные и параметры:

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma}, \beta_1 = \frac{a_1}{K}, \beta_2 = \frac{a_2}{K}, x = \frac{x_1}{\gamma y_2 K}, y = \frac{x_2}{\gamma y_2 K}, z = \frac{S}{K},$$

где ε — малый положительный параметр. В результате такой замены система (1)–(3) преобразуется в свою сингулярно возмущенную форму:

$$\dot{x} = x \left(\frac{m_1 z}{\beta_1 + z} - d_1 \right), \tag{4}$$

$$\dot{y} = y \left(\frac{m_2 z}{\beta_2 + z} - d_2 \right), \tag{5}$$

$$\varepsilon \dot{z} = z \left(1 - z - \frac{m_1 x}{\beta_1 + z} - \frac{m_2 y}{\beta_2 + z} \right). \tag{6}$$

Медленная поверхность системы [1, 2] описывается уравнением

$$z \left(1 - z - \frac{m_1 x}{\beta_1 + z} - \frac{m_2 y}{\beta_2 + z} \right) = 0.$$

Следует отметить, что $z \equiv 0$ является точным решением системы. Кроме того, плоскость $z \equiv 0$ является медленным инвариантным многообразием со сменой устойчивости, так как состоит из устойчивой части

$$S_1^s = \left\{ (x, y, 0) : 1 - \frac{m_1 x}{\beta_1} - \frac{m_2 y}{\beta_2} < 0 \right\}$$

и неустойчивой части

$$S_1^u = \left\{ (x, y, 0) : 1 - \frac{m_1 x}{\beta_1} - \frac{m_2 y}{\beta_2} > 0 \right\},$$

разделенных линией срыва

$$S_1^{br} = \left\{ (x, y, 0) : 1 - \frac{m_1 x}{\beta_1} - \frac{m_2 y}{\beta_2} = 0 \right\}.$$

Второй лист медленной поверхности

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) : 1 - z - \frac{m_1 x}{\beta_1 + z} - \frac{m_2 y}{\beta_2 + z} = 0 \right\}$$

разделен кривой срыва

$$S_2^{br} = \left\{ (x, y, z) : x = \frac{(2z - 1 + \beta_2)(\beta_1 + z)^2}{m_1(\beta_2 - \beta_1)}, y = \frac{(2z - 1 + \beta_1)(\beta_2 + z)^2}{m_2(\beta_1 - \beta_2)} \right\}$$

на устойчивую и неустойчивую части. В системе (4)–(6) могут возникать различные колебания, особое место среди которых занимают колебания, описываемые траекториями–утками. Отличительной особенностью таких колебаний являются преимущественно медленная динамика и/или малые, по сравнению с релаксационными колебаниями, амплитуды. Чтобы построить траекторию–утку системы (4)–(6) вблизи S_2^{br} , можно применить стандартную процедуру склейки, речь о которой шла во Введении. Однако в данной работе предлагается другой, более простой и эффективный подход.

2.1. Вырожденный случай

Рассмотрим случай отсутствия одного из хищников, то есть, пусть, например, $y \equiv 0$. Тогда система (4)–(6) принимает вид

$$\dot{x} = x \left(\frac{m_1 z}{\beta_1 + z} - d_1 \right), \tag{7}$$

$$\varepsilon \dot{z} = z \left(1 - z - \frac{m_1 x}{\beta_1 + z} \right). \tag{8}$$

Медленная кривая S системы (7), (8) описывается уравнением

$$z \left(1 - z - \frac{m_1 x}{\beta_1 + z} \right) = 0,$$

и состоит из прямой $z = 0$ и параболы. Две точки срыва

$$A_1 \left(x = \frac{\beta_1}{m_1}, z = 0 \right), \quad A_2 \left(x = \frac{(1 + \beta_1)^2}{4m_1}, z = \frac{1 - \beta_1}{2} \right)$$

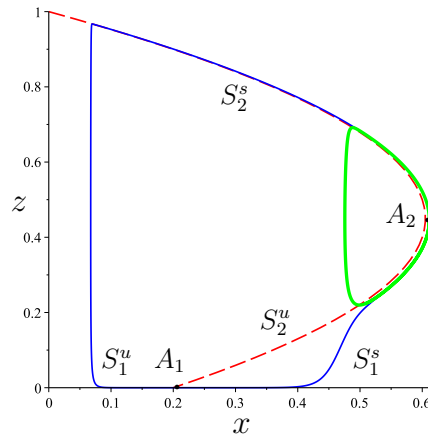


Рисунок 1. Медленная кривая (пунктирная кривая), траектория–утка (жирная сплошная кривая) и дулет траекторий–уток (тонкая сплошная кривая) системы (7), (8).

делят S на устойчивые (S_1^s и S_2^s) и неустойчивые части (S_1^u и S_2^u), см. рисунок 1.

В ε -окрестности устойчивых (неустойчивых) частей S_1^s и S_2^s (S_1^u и S_2^u) медленной кривой существуют устойчивые (неустойчивые) медленные инвариантные многообразия $S_{1,\varepsilon}^s$ и $S_{2,\varepsilon}^s$ ($S_{1,\varepsilon}^u$ и $S_{2,\varepsilon}^u$). Чтобы получить траекторию–утку, мы можем склеить $S_{2,\varepsilon}^s$ и $S_{2,\varepsilon}^u$ в точке A_2 , используя стандартную технику, см., например [7]. Для этого мы рассмотрим d_1 в качестве склеивающего параметра в виде асимптотического представления:

$$d_1^c(\varepsilon) = d_{10} + \varepsilon d_{11} + \varepsilon^2 d_{12} + \dots \quad (9)$$

Траекторию–утку системы (7), (8) удобно находить в параметрической форме:

$$x = \chi(z, \varepsilon) = \chi_0(z) + \varepsilon \chi_1(z) + \varepsilon^2 \chi_2(z) + \dots, \quad (10)$$

где z играет роль параметра. Подставляя разложения (9) и (10) в уравнение инвариантности

$$\frac{\partial \chi(z, \varepsilon)}{\partial z} z \left(1 - z - \frac{m_1 \chi(z, \varepsilon)}{\beta_1 + z} \right) = \varepsilon \chi(z, \varepsilon) \left(\frac{m_1 z}{\beta_1 + z} - d_1^c(\varepsilon) \right) \quad (11)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , мы найдем выражения для функций $\chi_i(z)$ в (10). Действительно, приравнявая коэффициенты при ε^0 , мы получаем

$$\chi_0 = \frac{(1 - z)(\beta_1 + z)}{m_1}. \quad (12)$$

Приравнявая коэффициенты при ε^1 в (11) и учитывая (12), имеем

$$-\frac{\partial \chi_0}{\partial z} \chi_1 \frac{m_1 z}{\beta_1 + z} = \chi_0 \left(\frac{m_1 z}{\beta_1 + z} - d_{10} \right). \quad (13)$$

В точке срыва A_2 выполняется условие $\frac{\partial \chi_0}{\partial z} = 0$. Чтобы обеспечить непрерывность функции $\chi_1 = \chi_1(z)$, мы требуем выполнения условия, которое следует из (13):

$$d_{10} = \frac{m_1 z}{\beta_1 + z} \Big|_{z=(1-\beta_1)/2} = \frac{m_1(1 - \beta_1)}{1 + \beta_1}.$$

Аналогично, приравнивая коэффициенты при ε^2 в (11), находим

$$d_{11} = -\frac{\beta_1^2(1 + \beta_1)}{2(1 - \beta_1)^2}.$$

В результате этой процедуры мы получим непрерывную траекторию, которая является траекторией–уткой (жирная сплошная линия на рисунке 1). Эта траектория отвечает “уточному” значению параметра $d_1 = d_1^c$, где

$$d_1^c = \frac{m_1(1 - \beta_1)}{1 + \beta_1} - \varepsilon \frac{\beta_1^2(1 + \beta_1)}{2(1 - \beta_1)^2} + O(\varepsilon^2).$$

Следует отметить, что $z = 0$ является точным решением системы (7), (8). В этом особом случае траектории системы, начинающиеся в области влияния устойчивой части S_1^s , будут продолжать движение некоторое время вдоль S_1^u . Поэтому мы можем преобразовать траекторию–утку, отвечающую $d_1 = d_1^c$, в так называемый дуплет траекторий–уток [2, 26, 27, 28]. Эта траектория изображена тонкой сплошной линией на рисунке 1.

Напомним, что в случае системы на плоскости, любые два значения параметра d_1 , отвечающие траекториям–уткам, экспоненциально близки и имеют одно и то же асимптотическое разложение. Так, например, для $\beta_1 = 0.1$, $m_1 = 0.5$, и $\varepsilon = 0.1$ значения d_1 , отвечающие траектории–утке и дуплету уток на рисунке 1, равны 0.408498400000 и 0.408498356366, соответственно.

Так как система (4)–(6) обладает конкурентной симметрией между двумя видами хищников, то полученные результаты можно распространить на случай $x \equiv 0$, то есть для системы

$$\dot{y} = y \left(\frac{m_2 z}{\beta_2 + z} - d_2 \right), \tag{14}$$

$$\varepsilon \dot{z} = z \left(1 - z - \frac{m_2 y}{\beta_2 + z} \right). \tag{15}$$

Рассуждая аналогично, получим значение d_2^c параметра d_2 :

$$d_2^c = \frac{m_2(1 - \beta_2)}{1 + \beta_2} - \varepsilon \frac{\beta_2^2(1 + \beta_2)}{2(1 - \beta_2)^2} + O(\varepsilon^2),$$

при котором (14), (15) имеет траекторию–утку (или дуплет траекторий–уток).

2.2. Колебания в трехмерном пространстве

Вернемся к трехмерной системе (4)–(6). Подставляя найденные значения $d_1 = d_1^c$ and $d_2 = d_2^c$ в (4)–(6), мы получим траекторию–утку в трехмерном пространстве. Следует отметить, что предлагаемый подход позволяет легко получить разнообразные формы траекторий–уток в трехмерном пространстве. Это можно делать за счет малого изменения d_1^c и/или d_2^c .

Наличие точного медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости $z \equiv 0$ позволяет получить новый тип траектории с многократной сменой устойчивости — каскад дуплетов траекторий–уток в трехмерном пространстве.

Чтобы получить траекторию, изображенную на рисунке 2 а), мы трансформируем траекторию–утку на плоскости yOz до формы дуплета, сохраняя форму “утка без головы” на плоскости xOz . Форма этой траектории может быть преобразована в каскад дуплетов траекторий–уток в трехмерном пространстве, см. рисунок 2 б).

Следует отметить, что рассматриваемый случай, когда дифференциальная система имеет точное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости, является типичной для большинства динамических моделей динамики популяций.

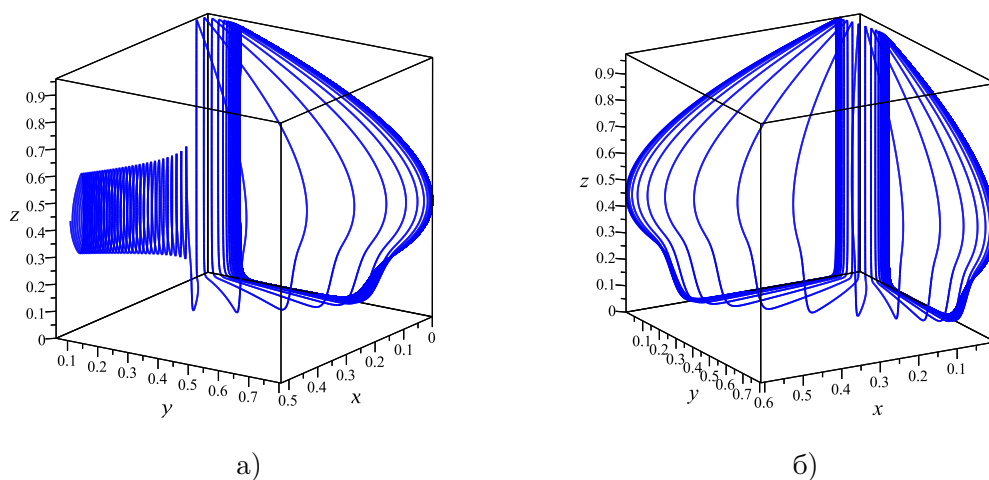


Рисунок 2. Каскады траекторий–уток системы (4)–(6). $\varepsilon = 0.1$, $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.13$, $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.4$, и а) $d_1 = 0.408515869462$, $d_2 = 0.307288368584$; б) $d_1 = 0.408498356366$, $d_2 = 0.307288368584$.

3. Литература

- [1] Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 320 с.
- [2] Shchepakina, E. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell // Lect. Notes in Math. — Cham: Springer, 2014.
- [3] Benoit, E. Chasse au canard / E. Benoit, J.L. Callot, F. Diener, M. Diener // Collect. Math. — 1981–1982. — Vol. 31–32. — P. 37–119. (in French).
- [4] Benoit, E. Les canards de R^3 / E. Benoit, C. Lobry // C.R. Acad. Sc. Paris. — 1982. — Vol. 294. — P. 483–488. (in French).
- [5] Benoit, E. Systèmes lents-rapides dans R^3 et leurs canards / E. Benoit // Société Mathématique de France, Astérisque. — 1983. — Vol. 109–110. — P. 159–191. (in French).
- [6] Mishchenko, E.F. Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems / E.F. Mishchenko, Yu.S. Kolesov, A.Yu. Kolesov, N.Kh. Rozov. — New York: Plenum Press, 1995.
- [7] Соболев, В.А. Траектории–утки в одной задаче теории горения / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32(9). — С. 1175–1184.
- [8] Deng, B. Food chain chaos with canard explosion / B. Deng // Chaos. — 2004. — Vol. 14(4). — P. 1083–1092.
- [9] Xie, F. Canard phenomena in oscillations of a surface oxidation reaction / F. Xie, M. Han, W. Zhang // J. Nonlinear Sci. — 2005. — Vol. 15. — P. 363–386.
- [10] Shchepakina, E. Black Swans and Canards in Laser and Combustion Models / E. Shchepakina, V. Sobolev // Singular Perturbation and Hysteresis / edited by M.P. Mortell *et al.*. — Philadelphia: SIAM, 2005. — 207–255.
- [11] Xie, F. The persistence of canards in 3-D singularly perturbed systems with two fast variables / F. Xie, M. Han, W. Zhang // Asymp. Anal. — 2006. — Vol. 47(1). — P. 95–106.
- [12] Marino, F. Chaotically spiking canards in an excitable system with 2D inertial fast manifolds / F. Marino, F. Marin, S. Balle, O. Piro // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98. — 074104.
- [13] Desroches, M. Numerical continuation of canard orbits in slow-fast dynamical systems / M. Desroches, B. Krauskopf, H.M. Osinga // Nonlinearity. — 2010. — Vol. 23. — P. 739–765.
- [14] Tchizawa, K. On the two methods for finding 4-dimensional duck solution / K. Tchizawa // Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 5. — P. 16–24.
- [15] Gorelov, G.N. Mathematical modelling of critical phenomena in thermal explosion theory / G.N. Gorelov, V.A. Sobolev // Combust. Flame. — 1991. — Vol. 87. — P. 203–210.
- [16] Gorelov, G.N. Duck–trajectories in a thermal explosion problem / G.N. Gorelov, V.A. Sobolev // Appl. Math. Lett. — 1992. — Vol. 5. — P. 3–6.
- [17] Соболев, В.А. Самовоспламенение запыленных сред / Соболев В.А., Щепакина Е.А. // Физика горения

- и взрыва. — 1993. — N 3. — С. 133-136.
- [18] Gol'dshtein, V. Criterion for thermal explosion with reactant consumption in a dusty gas / V. Gol'dshtein, A. Zinoviev, V. Sobolev, E. Shchepakina // Proc. London Roy. Soc. Ser. A. — 1996. — Vol. 452. — P. 2103–2119.
- [19] Shchepakina, E. Black swans and canards in self-ignition problem / E. Shchepakina // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2003. — Vol. 4. — P. 45–50.
- [20] Schneider, K.R. A new type of travelling wave / K.R. Schneider, E. Shchepakina, V. Sobolev // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2003. — Vol. 26. — P. 1349–1361.
- [21] Shchepakina, E. Integral manifolds, canards and black swans / E. Shchepakina, V. Sobolev // Nonlinear Analysis A. — 2001. — Vol. 44. — P. 897–908.
- [22] Щепакина, Е.А. Медленные интегральные многообразия со сменой устойчивости в случае векторной быстрой переменной / Е.А. Щепакина // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38(10). — С. 1358–1364.
- [23] Hsu, S.-B. Competing predators / S.-B. Hsu, S.P. Hubbell, P. Waltman P // SIAM J. Appl. Math. — 1978. — Vol. 35. — P. 617–625.
- [24] Muratori, S. Remarks on competitive coexistence / S. Muratori, S. Rinaldi // SIAM J. Appl. Math. — 1989. — Vol. 49. — P. 1462–1472.
- [25] Liu, W. Relaxation oscillations in a class of predator-prey systems / W. Liu, D. Xiao, Y.J. Yi // Differential Equations. — 2003. — Vol. 188. — P. 306–331.
- [26] Sobolev, V. Canard cascades / V. Sobolev // Discr. and Cont. Dynam. Syst. B. — 2013. — Vol. 18. — P. 513–521.
- [27] Pokrovskii, A. Canard doublet in a Lotka-Volterra type model / A. Pokrovskii, E. Shchepakina, V. Sobolev // Journal of Physics: Conference Series. — 2008. — Vol. 138. 012019.
- [28] Shchepakina, E. Invariant surfaces of variable stability / E. Shchepakina, V. Sobolev // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 727. 012016.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта 16-41-630529 и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013-2020).

Canards and invariant manifolds with stability change in a competitive model of population dynamics

Е.А. Shchepakina¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. In the paper, a technique for modelling various oscillations for a class of three-dimensional singularly perturbed systems is considered. A main feature of the systems under consideration is the presence of an exact slow invariant manifold of variable stability. This circumstance makes it possible to vary the oscillations by changing the shapes of the trajectories of two 2D-projections of the original 3D system. The discussed approach can be extended to canard chase in 3D. It should be noted that in comparison with traditional techniques of canard chase in 3D, this approach seems to be simpler. We demonstrate this approach by use of a competitive model of population dynamics.