

# Теоретико-игровая модель движения агентов по местности с препятствиями

А.В. Кузнецов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Университет информационных технологий и менеджмента в Жешув, Сухарского 2, Жешув, Польша, 35-225

**Аннотация.** В статье изучается непрерывная задача оптимального управления для многоагентного поиска пути, которая подходит для моделирования различных агентов типа БПЛА, роя и т.п. Несколько агентов пытаются найти лучшие маршруты, избегая препятствий и столкновений. Сначала определяется функционал затрат времени обхода пути. Показана непрерывность этого функционала и существование оптимального пути для одного агента. Затем описывается многоагентная задача поиска пути и соответствующая этому дифференциальная игра. Приводятся различные примеры оптимальных маршрутов и стратегии поведения агентов.

## 1. Введение

Целью настоящей статьи является получение непрерывной модели многоагентного поиска пути в форме задачи нелинейной оптимизации и изучение ее свойств, аналогично [1], и применение в ней теории игр. При этом используются результаты предыдущих работ автора [2, 3, 4, 5]. Разрабатываются алгоритмы перемещения агентов из своих начальных позиций в некоторые пункты назначения за кратчайшее время с избеганием коллизий. Препятствия, с которыми сталкиваются агенты, имеют различные степени проходимости и могут задерживать агентов на различное время. Кроме того, агенты координируют свои действия, чтобы избежать столкновений во время движения.

Проблема коллективного движения с обходом препятствий связана с известным методом потенциального поля планирования пути. В этом методе окружающая среда и препятствия описываются потенциальным полем, которое можно представить как воображаемую высоту [6]. Настоящая работа по сути изучает математические основы метода потенциального поля.

Мотивация для этой статьи – чрезвычайная трудность применения классических методов непрерывной оптимизации к многоагентным задачам поиска пути, а также вычислительная сложность перечисления возможных путей, чтобы найти самый быстрый путь для дискретной постановки задачи.

В этой статье термины «маршрут», «путь», «траектория» будут использоваться взаимозаменяемо.

## 2. Основные понятия и обозначения

Обозначим  $n$ -мерное вещественное векторное пространство как  $\mathbb{R}^n$ , множество вещественных неотрицательных чисел –  $\mathbb{R}_+$ . Предположим, что  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  является ограниченной областью с непустой связной внутренней частью, которую можно представить как объеди-

нение конечного числа выпуклых множеств,  $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$  – евклидова норма вектора  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ .  $C(X; Y)$  – пространство непрерывных функций  $f : X \rightarrow Y$ ,  $C^i(X; Y)$  – пространство  $i$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $f : X \rightarrow Y$  с нормой максимума,  $C(X, \mathbb{R}) = C(X)$ ,  $C^i(X, \mathbb{R}) = C^i(X)$ .  $W_p^m(X; Y)$  – пространства Соболева функций, определенных на  $X$  со значениями в  $Y$ , которые вместе со своими  $m$  слабыми производными содержатся в  $L_p(X; Y)$  с нормой

$$\|u\|_{W_p^m(X; Y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_X |D^\alpha u_i(x)|^p dx \right)^{2/p}}.$$

Задано множество из  $m$  агентов, обозначаемое как  $Ag = \{a_1, \dots, a_m\}$ , которые перемещаются по области  $\Omega$ ,  $\partial\Omega \in C^1$  по маршрутам  $r_k : [0, T] \rightarrow \Omega$  из точки  $A_k \in \partial\Omega$  в точку  $B_k \in \partial\Omega$ . Шаг по времени  $t$  непрерывно понимается нами как  $t \in [0, T]$ . Максимальная скорость агента в точке  $x$  и в момент времени  $t$  ограничена ограниченной функцией проходимости  $u \in C([0, T], C^1(\Omega))$ ,  $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Каждый  $k$ -ый агент  $a_k$  стремится двигаться с максимально возможной скоростью:

$$\|\dot{r}_k(t)\| = u(t, r_k(t)), \quad (1)$$

Необходимо минимизировать время  $\Theta_k(r_k)$ , которое каждый  $k$ -ый агент тратит на маршруте  $r_k$ :

$$\Theta_k(r_k) \rightarrow \min, \quad k = \overline{1, m} \text{ или } \max_{k=\overline{1, m}} \Theta_k(r_k) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Также предполагается, что любая пара  $k$ -го и  $j$ -агентов  $a_k$  и  $a_j$  имеют радиус  $\varepsilon$  и их траектории не могут пересекаться в один и тот же момент:

$$\forall (i, j \in \{\overline{1, m}\}, i \neq j) \quad \|r_i(t) - r_j(t)\| > \varepsilon, t \in [0, T]. \quad (3)$$

Видно, что условия (1) и (3) взаимно противоречат друг другу. Например,  $\Omega$  может состоять из двух частей с одним тонким мостом шириной  $2\varepsilon$ , и два агента не могут одновременно перемещаться по этому мосту с максимальной скоростью.

Чтобы устранить противоречие, мы заменим условие (1) на следующее:

$$\|\dot{r}_k(t)\| = u(t, r_k(t)) - v_{k,\varepsilon}(t, r_1(t), \dots, r_m(t)), \quad (4)$$

Пусть  $\mathcal{I}^k$  – упорядоченное по очередности движения в случае возможной коллизии множество агентов, поведение которых анализируется  $k$ -ым агентом  $a_k$ . Возможно предположить, например, что  $\mathcal{I}^k$  является некоторым непустым подмножеством некоторой перестановки  $Ag$ . Тогда  $v_{k,\varepsilon}(t, r_1(t), \dots, r_m(t))$  из (4) можно переписать следующим образом:

$$v_{k,\varepsilon}(t, r_1(t), \dots, r_m(t); \mathcal{I}^k) = \begin{cases} u(t, r_k(t)), & \exists (a_i \neq a_k \in \mathcal{I}^k) \|r_k(t) - r_i(t)\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \exists (a_i \neq a_k \in \mathcal{I}^k) \min_{i \in \mathcal{I}^k} \|r_k(t) - r_i(t)\| > \varepsilon, \end{cases}$$

или как

$$v_{k,\varepsilon}(t, r_1(t), \dots, r_m(t); \mathcal{I}^k) = \begin{cases} u(t, r_k(t)), & \forall (a_i \neq a_k \in \mathcal{I}^k) \xi_k(r_k(t), r_i(t)) \leq \varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon(\alpha, \xi_k(r_k(t), r_i(t))), & \varepsilon + \alpha \geq \xi_k(r_k(t), r_i(t)) > \varepsilon, \\ 0, & \forall (a_i \neq a_k \in \mathcal{I}^k) \xi_k(r_k(t), r_i(t)) > \varepsilon + \alpha, \end{cases}$$

где

$$\sigma_\varepsilon(\alpha, \xi) = \frac{\xi - \alpha}{\varepsilon - \alpha} u(t, r_k(t)) \text{ или } \sigma_\varepsilon(\alpha, \xi) = u(t, r_k(t)) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{z_0(\alpha + 2\varepsilon - 2\xi)}{\alpha} \right) \right),$$

$$z_0 = \min\{z | \operatorname{erf}(z) = 1\}.$$

Здесь  $\xi_k \in C((\mathbb{R}^2)^m)$  – некоторые агрегатные функции  $\|r_i - r_j\|$ ,  $i, j = \overline{1, m}$  подобно

$$\xi_k(r_1, \dots, r_m) = \min_{i \in \mathcal{I}^k} \|r_k - r_i\| \text{ или } \xi_k(r_1, \dots, r_m) = \frac{1}{m-1} \sum_{i \in \mathcal{I}^k} \|r_k - r_i\|.$$

Таким образом, формулы (3) и (4) определяют общие требования при поиске оптимальных решений при поиске самых быстрых маршрутов.

Обозначим  $\nu_\varepsilon(t, r_k(t)) = u(t, r_k(t)) - v_{k,\varepsilon}(t, r_1(t), \dots, r_m(t); \mathcal{I}^k)$ . Разумеется,  $\nu_\varepsilon \in C([0, T], C^1(\Omega))$  – ограниченная функция, так как  $u$  – ограниченная функция.

### 3. Маршруты и функционалы стоимости времени

Обозначим через  $\mathbf{L}_s$  произвольно упорядоченный конечный (или может быть счетный) набор точек  $\mathbf{L}_s = \{l_i \in [0, L] | l_i < l_{i+1}, l_0 = 0, l_s = T, i \in \mathbb{N}\}$ .

**Определение 1.** Обозначим через  $\mathcal{Y}$  множество таких непрерывных отображений из  $[0, L]$  в  $\Omega$  что для всех  $r \in \mathcal{Y}$  выполняются следующие условия:

1.  $\exists(\mathbf{L}_s \in \mathcal{T}) \forall (l_{i-1}, l_i \in \mathbf{L}_s) \quad r|_{(l_{i-1}, l_i)} \in C^2((l_{i-1}, l_i); \mathbb{R}^2)$ .
2. Множество  $r([0, L]) \cap \partial\Omega$  содержит как минимум два элемента.
3. Производные всех функций из  $\mathcal{Y}$  равномерно ограничены (за исключением, возможно, счетного множества точек, в которых производная не существует):  $\max_{l \in [0, L]} \|r'(l)\| \leq C_1$ .
4. Вторые производные всех функций из  $\mathcal{Y}$  равномерно ограничены в сумме:

$$\sum_{j \in J} \max_{l \in (l_{j-1}, l_j)} \|r''(l)\|^p \leq C_s,$$

$p > 1$ , где  $\{l_j | j \in J\}$  – счетное множество точек, в которых первая и вторая производные не существуют.

Возможно вычислить длину  $l(t)$  кривой  $r \in \mathcal{Y}$ , пройденной за время  $t$ , как

$$l(t) = \int_0^t \|\dot{r}(l(s))\| ds. \quad (5)$$

**Определение 2.** Определим функционал затрат времени на прохождение пути  $\Theta : \mathcal{Y} \times C^1[0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  как  $\Theta(r, l) = \min\{t \in (0, T] | r(l(t)) \in \partial\Omega\}$ .

### 4. Описание игры агентов

Определим игру агентов, происходящую в момент возможной коллизии  $t_p$ , следующим образом:

- Игроками являются сами агенты из  $Ag$ .
- Множество стратегий одно для всех игроков и определяется как  $S = \{B : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}\}$ . В простейшем случае, если функция  $u$  не зависит от времени, отображения  $B$  таковы, что  $B : r \mapsto r \circ \beta$ , где  $\beta \in C^\infty(0, T) \cap C[0, T]$  – монотонно возрастающая,  $\beta(t) \leq t$ ,  $t \in [0, T]$ . Т.е. агент может выбрать только скорость, с которой будет тормозить для избегания коллизии.

- Функция платежа для агента  $a_k$  задается как

$$F_k(B_p) = \begin{cases} \Theta(r_k, l_k) - \Theta(B_p(r_k), l_k), & \forall(i = \overline{1, m}, i \neq k) \|r_k(t) - r_i(t)\| > \varepsilon, \\ -\infty, & \exists(i \in \overline{1, m}, i \neq k) \|r_k(t) - r_i(t)\| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

где  $(r_k, l_k)$  минимизирует функционал  $\Theta$ ,  $B_p \in S$ .

- Функция полезности определяется следующим образом:

$$(B_{p,1}, \dots, B_{p,m}) \in S^m \succeq (\tilde{B}_{p,1}, \dots, \tilde{B}_{p,m}) \in S^m \iff \sum_{k=1}^m \Theta(B_{p,k}(r_k), l_k) \leq \sum_{k=1}^m \Theta(\tilde{B}_{p,k}(r_k), l_k).$$

Указанная игра может повторяться неограниченное количество раз, пока каждый агент не достигнет целевой позиции, при каждой возможной коллизии агентов. В результате получается последовательная игра, в которой функция платежа для агента  $a_k$  задается как  $\Phi(\mathbf{B}_k) = \sum_{p \in Col} F_k(B_p)$ , где  $Col$  – множество всех коллизий для агента  $a_k$ ,  $\mathbf{B}_k \in S^{|Col|}$  – вектор последовательно примененных стратегий из  $S$ . Открытым вопросом является то, насколько получившаяся в итоге траектория  $\tilde{r}_k = B_k^{p_1} \circ \dots \circ B_k^{p_h} \circ r_k$ ,  $p_i \in Col$ ,  $i = \overline{1, h}$  будет хуже оптимальной траектории  $r_k$  для одного агента.

Приведенная игра является обобщением дифференциальной игры избегания коллизий, описанной в статье [7], в котором траектории агентов заданы неявно. В промежутках между коллизиями поведение агентов описывается с помощью обычных методов непрерывной оптимизации, примеры применения которых будут даны ниже.

## 5. Элементарные примеры

Предположим, что область  $\Omega$  является квадратом  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , а маршруты принадлежат  $C^1(0, 1) \cap C[0, 1]$ , поэтому  $r(x) = (x, y(x))$  и  $u(t, r) = u(t, x, y)$ . В этой ситуации мы можем использовать стандартную вариационную технику, чтобы найти самый быстрый путь. Уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала

$$T(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

где  $F$  – вещественная функция с непрерывными первыми частными производными, а  $y$  – экстремаль  $T$ , запишется как

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Определим  $F$  и функционал затрат времени  $T$  как

$$F(x, y(x), y'(x)) = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{u(t, x, y(x))}, \quad T(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{u(t, x, y(x))} dx = \int_{\widehat{ab}} \frac{dl}{u(t, x, y(x))},$$

где  $dl$  является элементом кривой траектории  $\widehat{ab}$ . Уравнение Эйлера-Лагранжа для этого функционала

$$\frac{(y'(x)^2 + 1) (y'(x)u^{(1,0)}(x, y(x)) - u^{(0,1)}(x, y(x)))}{(y'(x)^2 + 1)^{3/2} u(x, y(x))^2} - \frac{y''(x)u(x, y(x))}{(y'(x)^2 + 1)^{3/2} u(x, y(x))^2} = 0. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим следующие простые случаи.

1. Предположим, что  $u(t, r) = u_1(x, y) = ax + by + c$ ,  $b \neq 0$ . Уравнение Эйлера-Лагранжа будет

$$-y''(x)(ax + by(x) + c) + ay'(x)^3 + ay'(x) - by'(x)^2 - b = 0$$

и мы получаем два точных решения (см. рисунок 5)

$$y_+(x) = e^{-b^2 c_1} \sqrt{1 - \frac{e^{2b^2 c_1} (a^2 (x - c_2) + ac + b^2 (x - c_2))^2}{(a^2 + b^2)^2}} - \frac{bc}{a^2 + b^2} - \frac{ac_2}{b},$$

$$y_-(x) = -e^{-b^2 c_1} \sqrt{1 - \frac{e^{2b^2 c_1} (a^2 (x - c_2) + ac + b^2 (x - c_2))^2}{(a^2 + b^2)^2}} - \frac{bc}{a^2 + b^2} - \frac{ac_2}{b}.$$

2.  $u(t, r) = u_2(x, y) = ax^2 + by^2 + c$ . Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют следующий вид

$$\frac{-y''(x)(ax^2 + by(x)^2 + c)}{\sqrt{y'(x)^2 + 1}(ax^2 + by(x)^2 + c)} - \frac{2(y'(x)^2 + 1)(by(x) - ax y'(x))}{\sqrt{y'(x)^2 + 1}(ax^2 + by(x)^2 + c)} = 0.$$

Здесь нет простого способа получить точное решение. Однако легко получить численное решение. Численные решения для этого уравнения показаны на рисунке 1.

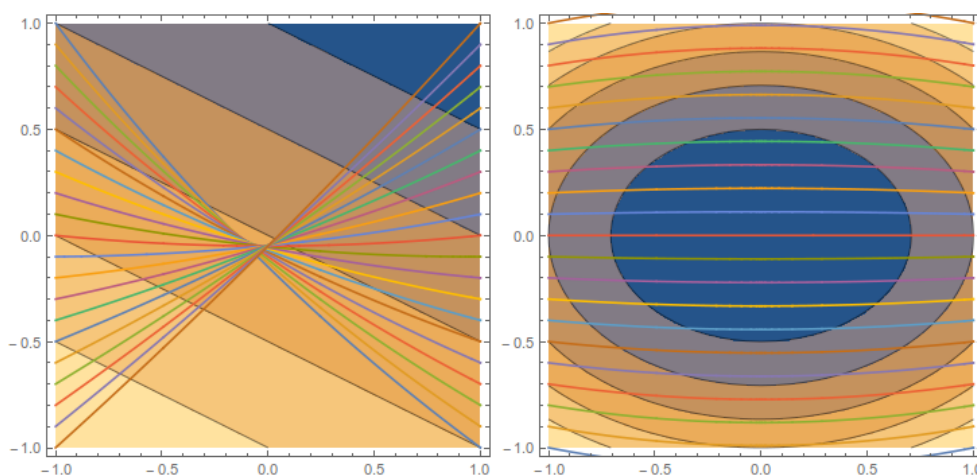


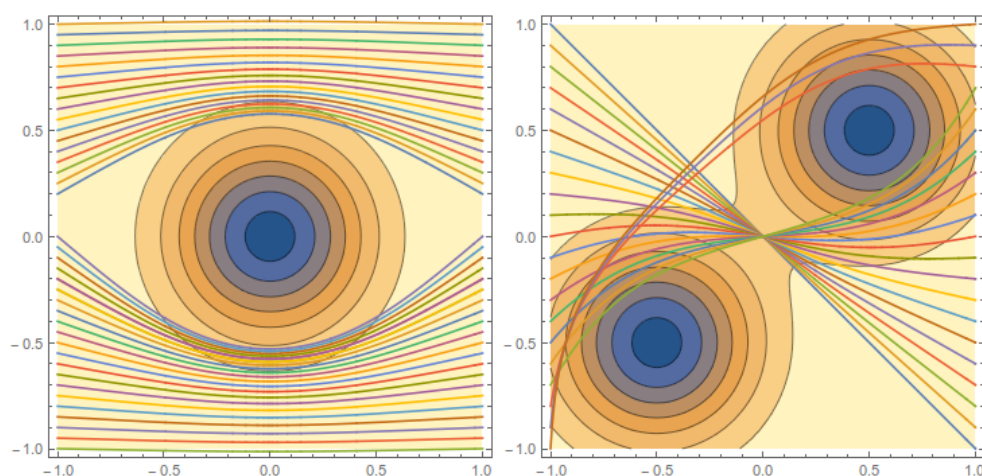
Рисунок 1. Экстремали для случаев 1 и 2

3.  $u(t, r) = u_3(x, y; a, b, c) = a \exp(-\frac{x^2 + y^2}{b}) + c$ . Это более интересный случай, потому что реальные препятствия могут быть описаны с помощью таких функций, как  $u_3(x, y; a, b, c)$ . Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$by''(x) \left( a + c \exp\left(\frac{x^2 + y(x)^2}{b}\right) \right) + 2axy'(x)^3 + 2axy'(x) - 2ay(x)(y'(x)^2 + 1) = 0.$$

Здесь также нет простого способа получить точное решение, и, кроме того, существуют некоторые вычислительные проблемы. Краевая задача для этих уравнений имеет более одного решения. Кроме того, в зависимости от начальных условий, мы можем получить минимумы, максимумы или, в худшем случае, численный алгоритм вообще не найдет правильного решения. Численные решения для этого уравнения показаны на рисунке 5.

4.  $u(t, r) = u_4(x, y) = u_3(x - x_0, y - y_0; a_0, b_0, c_0) + u_3(x - x_1, y - y_1; a_1, b_1, c_1)$ ,  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \neq 0$ . Параметры  $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$  выбраны так, чтобы  $\forall (x, y \in \Omega) u_4(x, y) \geq 0$ . Обозначим  $P_0(x, y) = a_0 \exp(-\frac{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2}{b_0})$ ,  $P_1(x, y) = a_1 \exp(-\frac{(x+x_1)^2 + (y+y_1)^2}{b_1})$ . Численные решения для этого уравнения Эйлера-Лагранжа показаны на рисунке 2.



**Рисунок 2.** Экстремали для случаев 3 (слева, одно препятствие) и 4 (справа, два препятствия)

## 6. Существование оптимального решения для одного агента

Предположим, что функции  $\xi_k$  – непрерывно дифференцируемые по  $r_i$  если  $\xi_k > \varepsilon$ , так что  $v_{k,\varepsilon} \in C([0, T], C^1(\Omega))$ . Положим  $r_k = r$ . Можно переписать (4), (5) как

$$l(t) = \int_0^t \|\partial_s r(l(s))\| ds = \int_0^t \nu_\varepsilon(l(s), r(l(s))) ds, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

и изучить существование решения для задачи

$$\|\dot{r}(l(t))\| = \nu_\varepsilon(t, r(l(t))), \quad (8)$$

$$\Theta(r, l) \rightarrow \min, \quad r \in \mathcal{Y}. \quad (9)$$

Обозначим как  $\Theta(r, l) = \Theta(r)$  для  $l$ , являющихся решениями (7).

Автор доказал, что (7) имеет единственное решение в  $C^1[0, T]$  в статье [1], лемма 4. Далее в этом разделе мы обозначим как  $l_n$  решение (7) с  $r = r_n$ .

Также в лемме 4 вышеупомянутой статьи говорится: если  $r_n \rightarrow r_0$  в  $W_p^1([0, L]; \mathbb{R}^2)$ ,  $p > 1$ ,  $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{Y}$ ,  $r_0 \in \mathcal{Y}$ , то  $l_n \rightarrow l_0$  in  $C^1[0, T]$ ,  $r_n \circ l_n \rightarrow r_0 \circ l_0$  in  $C([0, T]; \mathbb{R}^2)$  и если

$$0 < \eta = \min_{t \in [0, T], r \in \Omega} \nu_\varepsilon(t, r),$$

то  $r_n \circ l_n \rightarrow r_0 \circ l_0$  in  $W_p^1([0, T], \mathbb{R}^2)$ .

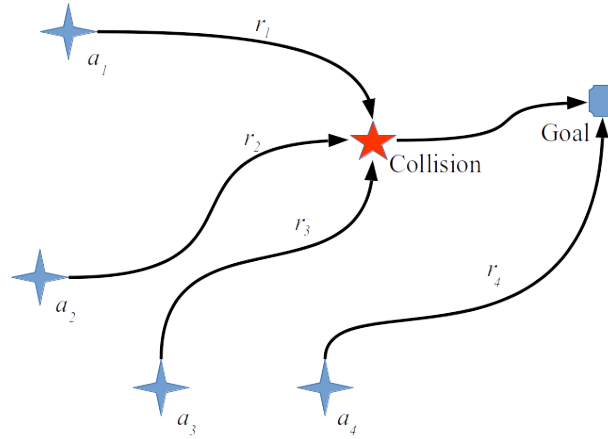
При таких условиях задача (8), (9) имеет решение ([1], теорема 2).

Для решения задачи (8), (9), необходимо дополнительно рассмотреть случай

$$0 \leq \min_{t \in [0, T], r \in \Omega} \nu_\varepsilon(t, r) < \eta, \quad \eta > 0.$$

Предположим что  $l$  – натуральный параметр кривой  $r$ . Если  $r$  является траекторией некоторого объекта, то равенство  $\|\dot{r}(l(t))\| = 0$  означает, что объект не движется.

Укажем дополнительные требования к функции  $\nu_\varepsilon$ . Если  $\nu_\varepsilon(t, r) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ , то существует интервал  $(t_1, t_2) \in [0, T]$  такой что  $t \in (t_1, t_2) \vee t = t_1 = 0 \vee t = T = t_2$  и  $\forall (t_0 \in (t_1, t_2)) \forall (r \in \mathcal{Y}) \nu_\varepsilon(t_0, (r \circ l)(t_0)) = 0$  или существуют  $t_1 < t \vee t = t_1 = 0$ ,



**Рисунок 3.** Коллизия агентов  $a_1, a_2, a_3$  в первом этапе игры. Агент  $a_4$  не является соседом для остальных агентов

$t_2 > t \forall t = t_2 = T, t_1, t_2 \in [0, T]$  такие что  $\forall (t_0 \in (t_1, t) \cup (t, t_2)) \forall (r \in \mathcal{Y}) \quad \nu_\varepsilon(t_0, (r \circ l)(t_0)) \neq 0$ .  
Наконец, граница области  $\Omega$  всегда проходима:

$$\forall (t \in (0, T]) \forall (r \in \partial\Omega) \quad \nu_\varepsilon(t, (r \circ l)(t)) > 0. \quad (10)$$

Обозначим множество всех открытых непересекающихся интервалов  $(t_{i-1}, t_i) \subset [0, T]$ , в которых  $\nu_\varepsilon(t, r(l(t))) = 0$  как  $\mathcal{Z}(r)$ , множество всех открытых непересекающихся интервалов  $[0, T]$ , в которых  $\nu_\varepsilon(t, r(l(t))) \geq \eta > 0$  как  $\mathcal{E}(r)$ . Также, обозначим как  $\mathcal{N}(r)$  множество всех открытых непересекающихся интервалов  $[0, T]$ , в которых  $0 < \nu_\varepsilon(t, r(l(t))) < \eta$ .

**Лемма 1.** Пусть  $r_n \rightarrow r_0$  in  $W_p^1([0, L]; \mathbb{R}^2)$ ,  $p > 1$ ,  $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{Y}$ ,  $r_0 \in \mathcal{Y}$ , тогда  $r_n \circ l_n \rightarrow r_0 \circ l_0$  in  $W_p^1([0, T]; \mathbb{R}^2)$ .

**Теорема 1.** Предположим, что свойство (10) имеет место. Тогда функционал  $\Theta : \mathcal{Y} \times C^1[0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  непрерывен для каждого фиксированного  $l \in C^1[0, T]$ , являющегося решением (7).

**Теорема 2.** Задача (8), (9) имеет решение.

Также имеем следующее следствие:

**Следствие 1.** Пусть  $\min_{(t,r) \in \Omega} \nu_\varepsilon(t, r) > 0$  и выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\left\| \sum_{i=1}^3 \lambda_i (r_n \circ l_n)'_+(\xi_i) \right\| \geq (1 - \eta) \min_{(t,r) \in \Omega} \nu_\varepsilon(t, r),$$

$\xi^*, \xi_i \in (\Theta(r_n), \Theta(r_0))$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $0 \leq \eta < 1$ .

## 7. Оптимальное решение для нескольких агентов

Все агенты  $a_i \in \mathcal{I}^k$ , такие что  $i \neq k$ , поведение которых влияет на поведение  $a_k$  с момента первой коллизии, называются соседями  $a_k$  (рисунок 3). Опишем пример рациональной стратегии для агента  $a_k$  на неподвижном ландшафте  $u$ , когда агент может только тормозить для избегания коллизии. Во время самой первой коллизии порядок торможения агентов выбирается по номерам агентов или по тому, какой агент ближе к цели. Во время последующих коллизий  $t_p$  применяется следующая логика:

- (i) Агент исследует список своих соседей  $Ag_k$ .
- (ii) Если агент во время предыдущей коллизии тормозил перед  $a_i \in Ag_k$ , т.е. выбирал  $\beta(t) \neq t$ , то выбирает  $\beta(t) = t$  (не тормозит). Иначе тормозит.
- (iii) Функция  $\beta$  выбирается таким образом, что  $|r_k(\beta(l_k(t_p))) - r_i(l_i(t_p))| \geq \varepsilon + \varepsilon'$ , но при этом  $\|\beta - 1\|_{C[0,T]} \rightarrow \min$ ,  $\varepsilon'$  – некоторый малый параметр, необходимый для избежания касания агентов.

Также можно рассматривать различные варианты социального поведения агентов, вводя «альтруистичных» агентов, склонных всегда уступать дорогу другим, «эгоистичных» агентов, с противоположными наклонностями, и так далее.

Определим отображения:  $\mathbf{i}_k : t \mapsto \mathcal{I}^k$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $t \in [0, T]$ , которое дает отношение соответствия между временем возможной коллизии  $t \in [0, T]$  для агента  $a_k$  и очередностью движения агентов, необходимой для разрешения коллизии. Обозначим через  $\mathcal{J}_k$  множество всех отображений  $\mathbf{i}_k$ ,  $\mathbf{i} = (\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_m)$  и  $w_{k,\varepsilon}(t, \mathbf{r}(t); \mathcal{I}^k) = u(t, r_k(t)) - v_{k,\varepsilon}(t, r_1(t), \dots, r_m(t); \mathcal{I}^k)$ ,

$$\Theta_*(\mathbf{r}, \mathbf{i}) = \sum_{k=1}^m \Theta(r_k, l_k[\mathbf{i}_k]), \quad (11)$$

где  $l_k[\mathbf{i}_k]$  является решением (7) с  $r = r_k$ :

$$l(t) = \int_0^t w_{k,\varepsilon}(s, \mathbf{r}(l(s)); \mathbf{i}_k(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Необходимо минимизировать  $\Theta_*(\mathbf{r}, \mathbf{i}) \rightarrow \min$ ,  $\mathbf{r} \in (\mathcal{Y})^m$ ,  $\mathbf{i} \in \mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \dots \times \mathcal{J}_m$ . Эта задача известна как многоагентный поиск пути [8]. В отсутствие коллизий существование решения этой задачи очевидно. В случае конечного количества  $q_{\text{col}}$  возможных коллизий на отрезке времени  $[0, T]$  функционал  $\Theta_*$  определен на декартовом произведении множества функций  $(\mathcal{Y})^m$  и конечного множества отображений  $\mathcal{J}$ . Справедлива оценка  $|\mathcal{J}_k| \leq (|Ag|!)^{q_{\text{col}}}$ , тогда

$$|\mathcal{J}| \leq \left( \max_{k=\overline{1,m}} |\mathcal{J}_k| \right)^m \leq ((|Ag|!)^{q_{\text{col}}})^m = (m!)^{mq_{\text{col}}},$$

следовательно количество элементов  $\mathcal{J}$  может быть значительно, что затрудняет применение классических методов оптимизации.

## 8. Заключение

В статье была изучена непрерывная задача оптимального управления для многоагентного поиска пути. Агентами могут быть БПЛА, наземные роботы, различные агенты роя и т.п. Показано существование оптимальных маршрутов агентов с помощью аппарата функционального анализа в отсутствие коллизий между агентами. Предложена дифференциальная игра, описывающая поиск пути агентами при наличии коллизий. Приводятся различные примеры оптимальных маршрутов и стратегии поведения агентов. Дальнейшее развитие работы может быть в направлении поиска равновесия для предлагаемой игры и в направлении перехода от дифференциальной игры к дискретной игре.

## 9. Благодарности

Работа была поддержана грантом РФФИ 18-07-01240 А.

## 10. Литература

- [1] Kuznetsov, A. V. On the motion of agents across terrain with obstacles // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. – Vol. 58(1). – P. 137-151. DOI: 10.1134/S096554251801009.
- [2] Kuznetsov, A.V. A model of the joint motion of agents with a three-level hierarchy based on a cellular automaton // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 57(2). – P. 340-349. DOI: 10.1134/S0965542517020099.



- [3] Kuznetsov, A.V. A simplified combat model based on a cellular automaton // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2017. – Vol. 56(3). – P. 397- 409. DOI: 10.1134/S106423071703011X.
- [4] Kuznetsov, A.V. Model of the motion of agents with memory based on the cellular automaton // International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems. – 2018. – Vol. 33(3). – P. 290-306. DOI: 10.1080/17445760.2017.1410819.
- [5] Kuznetsov, A. Organization of an agents formation through a cellular automaton // Large-Scale Systems Control. – 2017. – Vol. 70. – P. 136-167.
- [6] Klancar, G. Path planning / G. Klancar, A. Zdesar, S. Blazic, I.Skrjanc // Wheeled Mobile Robotics – Butterworth-Heinemann, 2017. – P. 161- 206.
- [7] Mylvaganam, T. A differential game approach to multi-agent collision avoidance / T. Mylvaganam, M. Sassano, A. Astolfi // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2017. – Vol. 62(8). – P. 4229-4235.
- [8] Ma, H. Multi-agent path finding with delay probabilities / H. Ma, T.K.S. Kumar, S. Koenig // Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence – San Francisco, California, USA, 2017. – P. 3605-3612.

## Game-theoretic Model of Agents' Motion over a Terrain with Obstacles

A.V. Kuznetsov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>University of Information Technology and Management in Rzeszow, Sucharskiego 2, Rzeszow, Poland, 35-225

**Abstract.** In the paper, we studied the continuous optimal control problem for multi-agent path-finding which is suitable for modelling various agents such as UAVs, swarms etc. Here, multiple agents try to find the best routes avoiding the obstacles and collisions. At first, we define path-traversing time cost functional. We show continuity of this functional and existence of the optimal path for a single agent. Then, we describe the multi-agent path-finding problem. Also, we consider game theory interpretation for the multi-agent path-finding with continuous routes and social behaviour. Various examples of optimal routes and agent behaviour strategies are provided.