

Техника расчета коэффициентов многопараметрического разложения М. Уильямса поля напряжений на основе вычислений методом конечного элемента

Л.Н. Косыгина¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Работа посвящена описанию, апробации и результатам методики расчета параметров механики разрушения для пластин с разрезами и трещинами. Для большого количества конфигураций образцов с трещинами и разрезами проведен конечно-элементный расчет в многофункциональном комплексе SIMULIA Abaqus. Полученное в результате вычислительного эксперимента поле напряжений используется для вычисления значений параметров механики разрушения: коэффициентов интенсивности напряжений, T-напряжений и амплитудных коэффициентов высших приближений полного многопараметрического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины. Показано, что приведенная в работе методика позволяет определить любое наперед заданное количество масштабных множителей.

1. Введение

Представление поля напряжений с помощью многопараметрического асимптотического разложения, предложенное М. Уильямсом в 1952г. [1], уже давно стало классическим для механики разрушения и широко используется в настоящее время [2-5]

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_{ij}^{(k)}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}(r, \theta)$ – компоненты тензора напряжений, индекс m отвечает типу нагружения (значение $m = 1$ соответствует нормальному отрыву, а $m = 2$ поперечному сдвигу), a_k^m – масштабные коэффициенты, описывающие все разнообразие геометрии рассматриваемых образцов и вариантов приложенной нагрузки, r и θ – полярные координаты с началом отсчета в вершине трещины рисунок 1.

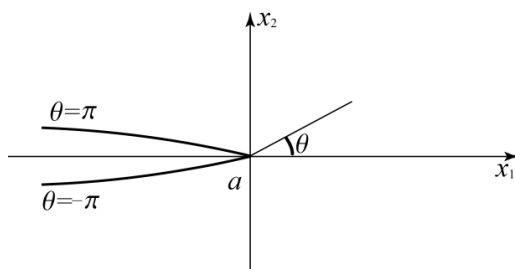


Рисунок 1. Полярные координаты с началом отсчета в вершине трещины.

$f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ – универсальные угловые функции, определяемые следующими соотношениями

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left[2 + \frac{k}{2} + (-1)^k \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right\}, \\ f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left[2 - \frac{k}{2} - (-1)^k \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right\}, \\ f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta - \left[\frac{k}{2} + (-1)^k \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta \right\}, \\ f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left\{ \left[2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left[\frac{k}{2} - 1 \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right\}, \\ f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left\{ \left[2 - \frac{k}{2} + (-1)^k \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left[\frac{k}{2} - 1 \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right\}, \\ f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta - \left[\frac{k}{2} - (-1)^k \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta \right\}. \end{aligned}$$

Долгое время считалось, что достаточно учитывать только первое слагаемое в разложении (1), и для большого количества различных конфигураций пластин с трещинами и разрезами еще в 60-70 года прошлого века получены значения коэффициентов интенсивности напряжения K_I и K_{II} [2]:

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1, K_{II} = \sqrt{2\pi} a_1^2.$$

В конце XX в. появились работы, в которых показана необходимость учета второго слагаемого (T – напряжения) в ряде (1)

$$T = a_2^1 f_{1,11}^{(2)}(\theta = 0).$$

Для вычисления коэффициентов интенсивности напряжения и T – напряжения можно использовать экспериментальные, вычислительные и аналитические методы. Следует отметить, что в многофункциональном комплексе SIMULIA Abaqus при проведении вычислительного эксперимента и моделировании распространения трещины с помощью метода контурного интеграла реализована процедура расчета не только для коэффициентов интенсивности напряжений, но и T – напряжения. В ряде экспериментальных и теоретических работ [3-10], опубликованных в последнее время, показана необходимость учета высших приближений ряда М. Уильямса (1).

Задача определения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса является трудной, поскольку:

1) в случае экспериментального определения методом фотоупругости коэффициентов ряда (1) необходимо решить нелинейную систему алгебраических уравнений;

2) в случае вычислительного эксперимента требуется разработка надежного алгоритма, позволяющего удержать требуемое количество слагаемых в асимптотическом разложении.

Дополнительно следует отметить важную проблему выбора экспериментальных точек для вычисления коэффициентов a_k^m как с помощью натурального, так и вычислительного эксперимента. Так, например, в работе Patil et al [10] предложена процедура, объединяющая и экспериментальное исследование, и компьютерное имитационное моделирование.

Однако многие вопросы остаются открытыми. Например, выбор экспериментальных точек для оценки коэффициентов полного разложения М. Уильямса. Поэтому в настоящей работе предпринята попытка разработать общий алгоритм построения многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса, который можно будет использовать для различных конфигураций образцов с трещинами и надрезами. В рамках конечно-элементного вычислительного эксперимента было выполнено моделирование одноосного растяжения пластины с центральной трещиной.

2. Описание техники расчета амплитудных коэффициентов

Предлагаемая техника расчета амплитудных коэффициентов включает следующие этапы:

а) Проведение вычислительного эксперимента для заданной конфигурации образца в многофункциональном комплексе SIMULIA Abaqus. Следует отметить, что моделирование распространения трещины можно проводить с помощью метода контурного интеграла и расширенного метода конечного элемента (XFEM метода). Первый метод более трудоемок и требует аккуратного построения сетки разбиения образца, но позволяет получить в качестве

выходных данных не только поля напряжений, деформаций и перемещений, но и значения таких параметров механики разрушения, как коэффициенты интенсивности напряжений и T – напряжений.

б) Для получения данных вычислительного эксперимента моделируется путь, вдоль которого будут выбираться значения поля напряжений, необходимые для расчета амплитудных коэффициентов асимптотического разложения. Начало координат во всех расчетах выбирается в вершине трещины.

в) Значения компонент поля напряжений σ_{ij} в выбранных точках пути и координаты точек в полярной системе координат сохраняются в текстовом файле, как множество элементов вида $\{r_n, \theta_n, \sigma_{ij}^n\}$, здесь индекс n отвечает порядковому номеру точки.

г) Подстановка полученных данных эксперимента в соотношения (1) приводит к алгебраической системе уравнений относительно амплитудных коэффициентов с прямоугольной матрицей коэффициентов. Для разрешения проблемы выбора экспериментальных точек был использован метод наименьших квадратов (least square technique) [10]. Для реализации алгоритма дальнейшего нахождения амплитудных коэффициентов в системе компьютерной алгебры Mathematica была разработана программа, которая позволяет вычислить любое наперед заданное количество коэффициентов асимптотического разложения (1).

3. Апробирование техники определения масштабных множителей. Задача об одностороннем растяжении пластины с центральной трещиной

Предложенная в работе методика была использована для определения амплитудных множителей полного асимптотического разложения М. Уильямса (1) для задачи об одноосном растяжении пластины с центральной трещиной.

Рассмотрим пластину из изотропного линейно-упругого материала с центральной трещиной рисунок 2.

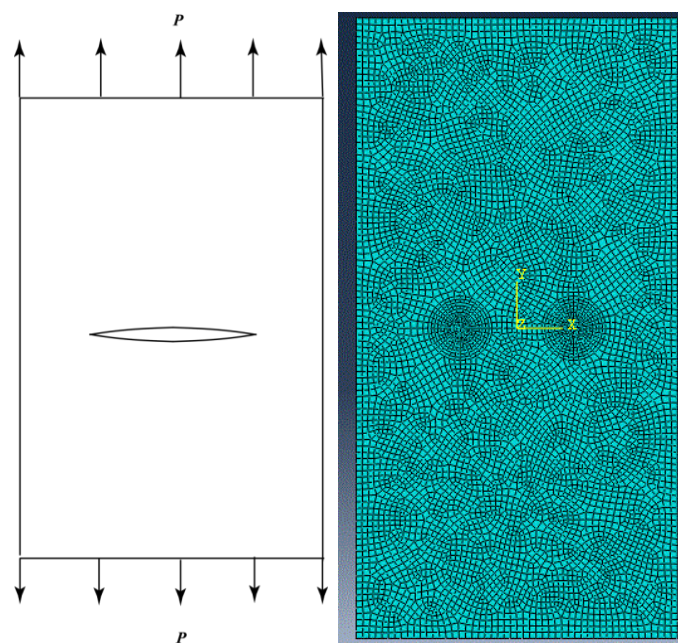


Рисунок 2. Моделирование распространения трещины для задачи об одноосном растяжении пластины с центральной трещиной: а) схема нагружения, б) моделирование распространения трещины с помощью метода контурного интеграла.

Задача решается численно с помощью метода конечного элемента в многофункциональном комплексе SIMULIA Abaqus с помощью разработанной техники, описанной в предыдущем

разделе 2. Экспериментальные точки выбирались по прямолинейному пути, начиная от вершины трещины, или по круговому контуру, с центром в вершине трещины рисунок 3.

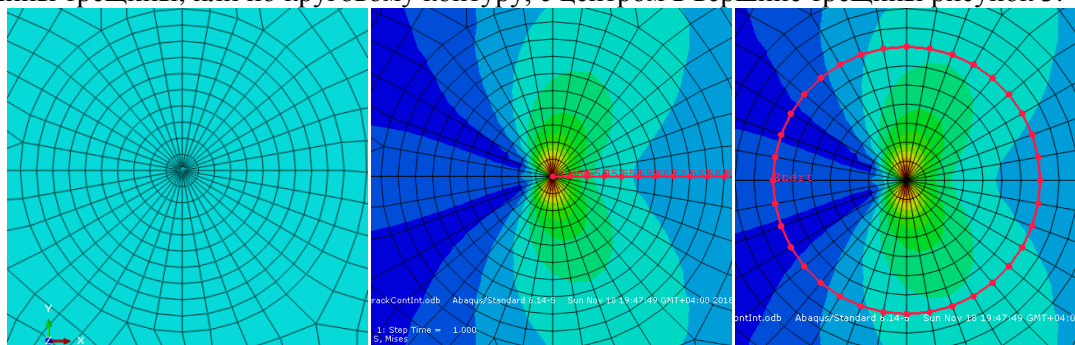


Рисунок 3. Выбор узловых точек в окрестности вершины трещины.

Каждая их экспериментальных точек после подстановки значений в (1) дает одно линейное алгебраическое уравнение относительно амплитудных множителей a_k^m , что приводит к системе уравнений, решая которую удастся вычислить любое наперед заданное количество масштабных множителей a_k^m .

4. Выводы

Приведенная в работе техника расчета коэффициентов многопараметрического разложения М. Уильямса поля напряжений на основе вычислений методом конечного элемента работает и может быть применена для расчета амплитудных множителей для других задач. Но стоит отметить, что необходимо дальнейшее апробирование данной методики для более широкого ряда задач, что даст возможность судить об области ее применимости на практике, особенно для задач, у которых нет аналитического решения или формул приближенного вычисления коэффициентов напряжения и Т- напряжения.

5. Литература

- [1] Williams, M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension // *Journal of Applied Mechanics*. – 1952. – Vol. 19. – P. 109-114.
- [2] Tada, H. *The Stress Analysis of Cracks Handbook* / H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin. – NY: ASME Press, 2000. – 678 p.
- [3] Hello, G. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium / G. Hello, M.B. Tahar, J. Roelandt // *International Journal of Solids and Structures*. – 2012. – Vol. 49(3-4). – P. 556-566. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024.
- [4] Stepanova, L.V. A Photoelastic Study for Multiparametric Analysis of the Near Crack Tip Stress Field Under Mixed Mode Loading / L.V. Stepanova, P.S. Roslyakov, P.N. Lomakov // *Procedia Structural Integrity*. – 2016. – Vol. 2. – P. 1797-1804. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.226.
- [5] Stepanova, L.V. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium / L.V. Stepanova, P.S. Roslyakov // *International Journal of Solids and Structures*. – 2016. – Vol. 100-101. – P. 11-28.
- [6] Stepanova, L.V. Complete Williams Asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane / L.V. Stepanova, P.S. Roslyakov, T. Gerasimova // *Solid State Phenomena*. – 2017. – Vol. 258. – P. 209-212.
- [7] Hello, G. On the exactness of truncated crack-tip stress expansions / G. Hello, M.B. Tahar // *Procedia Materials Science*. – 2014. – Vol. 3. – P.750-755. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.123.

- [8] Hello, G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard–Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Vol. 144-145. – P. 265-275. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012.
- [9] Косыгина, Л.Н. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины для пластины с боковыми надрезами: теоретическое исследование и вычислительный эксперимент // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2018. – Т. 24, № 2. – С. 55-66. DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66.
- [10] Patil, P. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity / P. Patil, C.P. Vyasarayani, M. Ramji // Optics and Lasers in Engineering. – 2017. – Vol. 93. – P. 182-194. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2017.02.003.

A new calculation technique of coefficients of the multi-parametric M. William's expansion based on finite element method

L.N. Kosygina¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. This study is aimed at the description, testing and results of the methodology for calculating the fracture mechanics parameters for cracked specimens. Finite element calculations are performed in the multi-functional finite element software SIMULIA Abaqus for a large number of sample configurations. The obtained stress field is used to calculate the fracture mechanics parameters: stress intensity factors, T-stress and coefficients of higher order terms of the M. William's multi-parametric asymptotic expansion. It is shown that the calculation methodology allows us to determine any preassigned quantity of coefficients in the M. William's series expansion.