Стохастическая модель переноса влаги в атмосфере: двумерный случай

В.С. Ножкин[1], М.Е. Семёнов[1,2], И.И. Ульшин[1]

[1]ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (Воронеж), ул. Старых Большевиков 54А, Воронеж, Россия, 394064
[2]Воронежский государственный университет, Университетская площадь 1, Воронеж, Россия, 394018

Аннотация. В представленной работе предлагается модель переноса влаги в атмосфере, основанная на стохастической трактовке компонент вектора скорости. Приводятся явные формулы математического ожидания и второй моментной функции решения уравнения переноса влаги без источников и стоков со случайными коэффициентами. В отличие от предыдущих работ рассмотрен двумерный случай уравнения переноса влаги. Результаты могут найти применение в микромасштабных гидродинамических моделях локального прогнозирования опасных явлений погоды.

1. Введение

Локальная погода и особенно опасные явления определяются мезо- и микровозмущениями атмосферы. Прогнозирование этих возмущений осуществляется при помощи трех основных подходов [1-3] (прямого численного моделирования, моделирования крупных вихрей и использования, осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса и переноса). Это требует больших вычислительных мощностей, решения проблемы замыкания путем привлечения полуэмпирических моделей различного уровня, и правильности определения начальных условий. По этим причинам в большинстве существующих методик прогноза метеорологических явлений, в том числе с повышенным влагосодержанием, прибегают к упрощению моделей и не производят учет турбулентных движений в процессах переноса частиц воздуха.

Одна из таких моделей основана на численном решении уравнений переноса массовой доли водяного пара [2]. Рассмотрим одно из уравнений модели выражающее постоянство массовой доли до начала момента конденсации.

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + w\frac{\partial s}{\partial z} = 0\,, \qquad (1)$$

где u, v, w – проекции вектора скорости движения частицы на оси локальной системы координат.

Отсутствие учета турбулентных свойств атмосферы, препятствует достижению стопроцентной оправдываемости метеорологических прогнозов, поэтому исследования, направленные на повышение их успешности, являются актуальными.

2. Постановка задачи

Один из возможных выходов в служившейся ситуации является проведения учета турбулентных свойств атмосферы в рамках стохастических методов [4-9]. В этом случае естественно трактовать проекции вектора скорости случайными процессами. Пренебрегая вертикальными движениями воздуха выражение (1) легко преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial t} = -\varepsilon_1(t)\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial x} - \varepsilon_2(t)\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial y}, \tag{2}$$

с детерминированным начальным условием:

$$s(0,x,y) = s_0(x,y), \tag{3}$$

где $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$ – случайные процессы, случайные процессы, характеристики которых идентифицируются на основе пространственно-временного распределения скорости ветра.

Процессы рассматриваются на всей плоскости ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$).

Таким образом, целью настоящей работы является решение задачи (2), (3) в которой компоненты вектора скорости являются мгновенными характеристиками турбулентных движений и трактуются как случайные процессы. Решение данной задачи позволит на модельном уровне учесть турбулентные свойства атмосферы в наглядном виде.

3. Переход к детерминированной задаче

Случайные процессы $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ считаем заданным характеристическим функционалом

$$\varphi(\nu_1,\nu_2) = M\left[\exp(i\int_T \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right], \tag{4}$$

где функции ν принадлежат пространству $L_1(T)$ суммируемых на отрезке T функций с нормой $\|\nu\| = \int_T |\nu(\tau)| d\tau$; M – математическое ожидание по функции распределения процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$; T – отрезок времени, на котором изучаются процессы.

Умножим уравнение (2) на $\exp(i\int_T \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)$ и применим операцию математического ожидания по функции распределения случайных процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ к полученному равенству

$$M\left[\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial t}\exp(i\int_T \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right] = M\left[-\varepsilon_1(t)\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial x}\exp(i\int_T \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right] -$$

$$-M\left[-\varepsilon_2(t)\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial y}\exp(i\int_T \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right]. \tag{5}$$

Для дальнейших построений введем вспомогательное отображение:

$$z(t,x,y,\nu_1,\nu_2) = M\left[s(t,x,y)\exp(i\int_T \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right], \tag{6}$$

где $x, y \in R, \nu_j \in L_1(T), j = 1{,}2$. Тогда уравнение (5) можно представить в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = i\frac{\delta}{\delta\nu_1(t)}\frac{\partial}{\partial x}z + i\frac{\delta}{\delta\nu_2(t)}\frac{\partial}{\partial y}z, \tag{7}$$

с начальным условием

$$z(0,x,y,\nu_1,\nu_2) = s_0(x,y)\varphi(\nu_1,\nu_2), \tag{8}$$

где $\frac{\delta}{\delta\nu_j(t)}$ – вариационные производные. Детальное описание техники вариационного дифференцирования приведено, например, в [9].

Непосредственно из определений следует, что математическое ожидание решения уравнения (2) с начальным условием (3) может быть получено из соотношения (6), в котором функции ν_1 и ν_2 следует положить равными нулю. Иными словами имеет место равенство

$$z(t,x,y,0,0) = M[s(t,x,y)]. \tag{9}$$

Таким образом, для нахождения математического ожидания решения уравнения (2) с начальным условием (3) достаточно найти решение уравнения с вариационными и обычными производными (7) при условии (8) в некоторой окрестности нулевой функции пространства $L_1(T)\times L_1(T)$.

4. Математическое ожидание решения уравнения постоянства массовой доли водяного пара

Применив к обеим частям выражений (7) и (8) преобразование Фурье [10], получим

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{x,y}[z](\xi_x,\xi_y) = i\frac{\delta}{\delta\nu_1(t)}(-i\xi_x)F_{x,y}[z](\xi_x,\xi_y) + i\frac{\delta}{\delta\nu_2(t)}(-i\xi_y)F_{x,y}[z](\xi_x,\xi_y) \tag{10}$$

$$F_{x,y}[z(0,x,y,\nu_1,\nu_2)](\xi_x,\xi_y) = F_{x,y}[s_0(x,y)](\xi_x,\xi_y)\varphi(\nu_1,\nu_2), \tag{11}$$

где $F_{x,y}$ – преобразование Фурье по переменным x и y, а ξ_x и ξ_y – двойственные к x и y переменные, соответственно.

Введем обозначение

$$Z(t,\xi_x,\xi_y,\nu_1,\nu_2) = F_{x,y}[z(t,x,y,\nu_1,\nu_2)](\xi_x,\xi_y).$$

При этом соотношения (10) и (11) перепишутся в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}Z(t,\xi_x,\xi_y,\nu_1,\nu_2) = \xi_x\frac{\delta}{\delta\nu_1(t)}Z(t,\xi_x,\xi_y,\nu_1,\nu_2) + \xi_y\frac{\delta}{\delta\nu_2(t)}Z(t,\xi_x,\xi_y,\nu_1,\nu_2). \tag{12}$$

$$Z_0(0,\xi_x,\xi_y,\nu_1,\nu_2) = F_{x,y}[s_0(x,y)](\xi_x,\xi_y)\varphi(\nu_1,\nu_1). \tag{13}$$

Введем вспомогательную функцию $\chi(\tau,t,\xi)$ переменного $\xi\in R$ следующим образом: $\chi(\tau,t,\xi) = sign(\xi-\tau)$ при ξ, принадлежащем отрезку с концами τ и t, и $\chi(\tau,t,\xi)=0$ в противном случае. Дальнейшие построения опираются на следующую лемму [7]:

Лемма 1. *Пусть $a(t)$ – непрерывная функция на отрезке T и функционал $y: L_1(T)\to \mathbb{C}$ имеет вариационную производную $\frac{\delta y(\nu)}{\delta\nu(t)}$. Тогда почти при всех $t\in T$ существует производная $\frac{\partial y(\nu + a\chi(\tau,t))}{\partial t}$ и выполняется равенство*

$$\frac{\partial y(\nu + a\chi(\tau,t))}{\partial t} = a(t)\frac{\delta y(\nu + a\chi(\tau,t))}{\delta\nu(t)}.$$

Теорема 2. *Если существуют вариационные производные $\frac{\delta\varphi(\nu_1,\nu_2)}{\delta\nu_1(t)}$, $\frac{\delta\varphi(\nu_1,\nu_2)}{\delta\nu_2(t)}$, то отображение*

$$Z(t,\xi_x,\xi_y,\nu_1,\nu_2) = Y_0(0,\xi_x,\xi_y,\nu_1+\xi_x\chi(0,t),\nu_2+\xi_y\chi(0,t)) \tag{14}$$

является решением задачи (12) и (13).

Доказательство. Непосредственной подстановкой (14) в (12) и (13) и использованием леммы 1 убеждаемся в справедливости теоремы. ■

Пусть $\overset{x,y}{*}$ – знак свертки функций по переменным x, y; $F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}$ – обратное преобразование Фурье по переменным ξ_x,ξ_y.

Теорема 3. *Если существует* $F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[\varphi(\nu_1+\xi_x\chi(0,t),\nu_2+\xi_y\chi(0,t))\right]$, то

$$y(t,x,y,\nu_1,\nu_2) = s_0(x,y)\overset{x,y}{*}F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[\varphi(\nu_1+\xi_x\chi(0,t),\nu_2+\xi_y\chi(0,t))\right](x,y) \tag{15}$$

является решением задачи (12), (13).

Доказательство. Применим обратное преобразование Фурье [10] к (14), получим (15). ■

Теорема 4. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы, тогда*

$$M\left[s(t,x,y)\right]=s_0(x,y)\overset{x,y}{*}F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[\varphi(\xi_x\chi(0,t),\xi_y\chi(0,t))\right](x,y)\,, \qquad (16)$$

является математическим ожиданием решения уравнения (1), при начальном условии (2).

Доказательство. Для доказательства соотношения (16) достаточно в соотношении (15) положить $\nu_1=\nu_2=0$. ■

5. Вторая моментная функция решения уравнения постоянства массовой доли водяного пара

Для определения второй моментной функции решения задачи (2), (3) введем в рассмотрение отображение:

$$w(t,x,y,t_1,x_1,y_1,\nu_1,\nu_2)=M\left[s(t,x,y)s(t_1,x_1,y_1)\exp(i\int_T\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right]. \qquad (17)$$

Отметим, что введенное отображение симметрично по переменным t,x,y и t_1,x_1,y_1.

Умножим уравнения (2), (3) на $s(t_1,x_1,y_1)\exp(i\int_T\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)$ и применим операцию математического ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, получим

$$M\left[\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial t}s(t_1,x_1,y_1)\exp(i\int_T\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right]=$$

$$=M\left[-\varepsilon_1(t)\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial x}s(t_1,x_1,y_1)\exp(i\int_T\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right]-$$

$$-M\left[-\varepsilon_2(t)\frac{\partial s(t,x,y)}{\partial x}s(t_1,x_1,y_1)\exp(i\int_T\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right], \qquad (18)$$

$$M\left[s(0,x,y)s(t_1,x_1,y_1)\exp(i\int_T\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right]=$$

$$=M\left[s_0(x,y)s(t_1,x_1,y_1)\exp(i\int_T\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j(\tau)\nu_j(\tau)d\tau)\right]. \qquad (19)$$

Используя вспомогательное отображение w, соотношения (18), (19) запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}w=i\frac{\delta}{\delta\nu_1(t)}\frac{\partial}{\partial x}w+i\frac{\delta}{\delta\nu_2(t)}\frac{\partial}{\partial y}w\,. \qquad (20)$$

$$w(0,x,y,t_1,x_1,y_1,\nu_1,\nu_2)=s_0(x,y)z(t_1,x_1,y_1,\nu_1,\nu_2). \qquad (21)$$

Определение 1. *Второй моментной функцией решения задачи (2) с детерминированным начальным условием (3) называется* $w(t,x,y,t_1,x_1,y_1,0,0)$ *где* w *– симметричное по переменных* t,x,y *и* t_1,x_1,y_1 *решение задачи (20), (21) и обозначается через* $M\left[s(t,x,y)s(t_1,x_1,y_1)\right]$.

Теорема 5. *В условиях теоремы 2 решение задачи (20), (21) имеет вид*

$$w=s_0(x,y)\overset{x,y}{*}F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[y(t_1,x_1,y_1,\nu_1+\xi_x\chi(0,t),\nu_2+\xi_y\chi(0,t))\right](x,y)\,. \qquad (22)$$

где $z(t_1,x_1,y_1,\nu_1,\nu_2)$ *определяется равенством (15).*

Доказательство. Задача (20), (21) имеет вид задачи (7), (8). Используя формулу (14) получаем (22).

Подставим равенством (15) в (22), получим

$$w = s_0(x,y) \overset{x,y}{*} F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[s_0(x_1,y_1) \overset{x_1,y_1}{*} \right.$$

$$\left. \overset{x_1,y_1}{*} F^{-1}_{\xi_{x_1},\xi_{y_1}}\left[\varphi(\nu_1+\xi_{x_1}\chi(0,t_1)+\xi_x\chi(0,t),\nu_2+\xi_{y_1}\chi(0,t_1)+\xi_y\chi(0,t)\right](x_1,y_1)\right](x,y)\,. \qquad (23)$$

■

Теорема 6. *В условиях предыдущей теоремы вторая моментная функция решения задачи (2), (3) имеет вид*

$$M\left[s(t,x,y)s(t_1,x_1,y_1)\right] = s_0(x,y) \overset{x,y}{*} F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[s_0(x_1,y_1) \overset{x_1,y_1}{*} \right.$$

$$\left. \overset{x_1,y_1}{*} F^{-1}_{\xi_{x_1},\xi_{y_1}}\left[\varphi(\xi_{x_1}\chi(0,t_1)+\xi_x\chi(0,t),\xi_{y_1}\chi(0,t_1)+\xi_y\chi(0,t)\right](x_1,y_1)\right](x,y)\,. \qquad (24)$$

Доказательство. Поскольку $w(t,x,y,t_1,x_1,y_1,0,0) = M\left[s(t,x,y)s(t_1,x_1,y_1)\right]$, то из (23) при $\nu_1=\nu_2=0$ получаем (24). ■

Важной статистической характеристикой случайного процесса является дисперсионная функция $D\left[s(t,x,y)\right] = M[s^2(t,x,y)] - \left(M\left[s(t,x,y)\right]\right)^2$.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы 3, тогда дисперсионная функция решения задачи (2), (3) имеет вид*

$$D\left[s(t,x,y)\right] = s_0(x,y) \overset{x,y}{*} F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[s_0(x,y) \overset{x,y}{*} F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[\varphi(2\xi_x\chi(0,t),2\xi_y\chi(0,t)\right](x,y)\right](x,y) -$$

$$-\left(s_0(x,y) \overset{x,y}{*} F^{-1}_{\xi_x,\xi_y}\left[\varphi(\xi_x\chi(0,t),\xi_y\chi(0,t))\right](x,y)\right)^2. \qquad (25)$$

Доказательство. Подставив в формулу определения дисперсионной функции равенства (16) и (24) и положив в последнем выражении $t_1=t,\ x_1=x,\ y_1=y$, получим (25).■

6. Заключение

В настоящей статье предложена двумерная модель переноса влаги в атмосфере, позволяющая учитывать ее турбулентные свойства в рамках стохастических методов. Получены явные формулы математического ожидания и второй моментной функции решения уравнения переноса влаги со случайными коэффициентами в общем виде. Поученные результаты применительны к задачам метеорологии сосредоточены, прежде всего, в области прогнозирования погодных явлений малого пространственно-временного масштаба. Именно на таких интервалах учет случайных составляющих в моделях переноса представляется вполне оправданным, поскольку неконтролируемые отклонения скорости ветра могут вносить существенные изменения в распределения метеорологических величин.

7. Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФН (грант № 19-11-00197).

8. Литература

[1] Матвеев, Л.Т. Физика атмосферы – СПб.: Гидрометеоиздат, 2000. – 778 с.
[2] Белов, Я.Н. Численные методы прогноза погоды / Я.Н. Белов, Е.П. Борисенков, Б.Д. Панин – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 376 с.
[3] Фрик, П.Г. Турбулентность: Подходы и модели – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 291 с.
[4] Oksendal, B. Stochastic differential equations – Berlin: Springer, 2003. – 379 p.
[5] Liptser, R. S. Statistics of random processes. 1: General theory / R. S. Liptser, A. N. Shiryaev – Berlin: Springer, 2001. – 395 p.

[6] Zadorozhniy, V.G. A linear firet-order differential equation with ordinary variational derivatives – Moscow: Pleiades Publishing, Ltd., 1993. – Vol. 53. – P. 383-388.
[7] Zadorozhniy, V.G. Linear chaotic resonance in vortex motion // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 53(4). – P. 486-502.
[8] Задорожний, В.Г. Модель адвективных изменений влажности воздуха со стохастическими параметрами / В.Г. Задорожний, М.Е. Семенов, И.И. Ульшин, В.С. Ножкин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 2. – С. 38-48.
[9] Задорожний, В.Г. Методы вариационного анализа – Москва-Ижевск: РХД, 2006. – 316 с.
[10] Шилов, Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс – М.: Наука, 1965. – 328 с.

A stochastic model of the moisture motion in the atmosphere: two-dimensional case

V.S. Nozhkin[1], M.E. Semenov[1,2], I.I. Ulshin[1]

[1]MESC AF “N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy” (Voronezh), Starikh Bolshevikov street 54A, Voronezh, Russia, 394064
[2]Voronezh State University, Universitetskaya pl. 1, Voronezh, Russia, 394018

Abstract. In this work, we propose a model of moisture transfer in the atmosphere based on a stochastic interpretation of the components of the velocity vector. Explicit formulas of the mathematical expectation and the second-moment function of the solution of the moisture transfer equation without sources and drains with random coefficients are given. In contrast to previous works, the two-dimensional case of the moisture transfer equation is considered. The results can be used in microscale hydrodynamic models of local forecasting of dangerous weather phenomena.