Стохастическая модель переноса влаги в атмосфере

В.С. Ножкин[1], М.Е. Семёнов[1,2], И.И. Ульшин[1]

[1]ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Старых Большевиков, 54А, Воронеж, Россия, 394064
[2]Воронежский государственный университет, Университетская площадь, 1, Воронеж, Россия, 394018

Аннотация. В статье предлагается модель переноса влаги в атмосфере, формализуемая посредством дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Приводится аналитическое выражение для решения указанного уравнения в пространстве изображений. Описываются экспериментальные данные, на основе которых постулируется закон распределения соответствующих параметров.

1. Введение

Погодные условия оказывают непосредственное влияние на многие сферы человеческой деятельности. Учет фактических и прогностических метеорологических данных дает возможность повысить эффективность функционирования различных потребителей метеорологической информации (транспорт, сельское хозяйство, строительство и др.). Стохастический характер атмосферных процессов препятствует достижению стопроцентной оправдываемости метеорологических прогнозов, поэтому исследования, направленные на повышение их успешности, являются актуальными.

Поскольку большинство опасных метеорологических явлений так или иначе связаны с повышенным содержанием в воздухе водяного пара, в работе моделируется процесс влагопереноса в атмосфере, приводящий в том числе к образованию туманов, густых дымок и низкой облачности. В силу существенной временной и пространственной изменчивости отдельных показателей влагосодержания воздуха целесообразным является использование консервативных характеристик влажности, одной из которых является удельная влажность [1]. При рассмотрении одной воздушной массы постоянство указанного параметра атмосферы при анализе и прогнозе условий образования продуктов конденсации водяного пара можно выразить следующим образом:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}+w\frac{\partial s}{\partial z}=0\,, \qquad (1)$$

где u, v, w – проекции вектора скорости движения частицы на оси локальной системы координат.

Уравнение (1) является нелинейным и рассматривается совокупно с гидродинамической системой уравнений движения воздушных масс [1, 2]. При этом в рамках гидродинамического подхода в этом уравнении зачастую используются лишь усредненные значения компонент вектора скорости. В то же время, реальные компоненты, как показывают наблюдения, подвержены неупорядоченным хаотическим возмущениям, учет которых невозможен в рамках традиционного подхода. Поэтому решение уравнения (1) не всегда совпадает с полученными в экспериментах результатами [1, 3].

2. Постановка задачи

Альтернативный подход связан с учетом турбулентных свойств атмосферы в рамках стохастических методов [3, 4, 5]. В этом случае естественно трактовать проекцию вектора скорости как случайную величину, закон распределения которой подлежит определению. Пренебрегая вертикальными движениями воздуха и направив ось x по направлению преимущественного переноса воздушной массы, выражение (1) легко преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} = 0\,. \tag{2}$$

Целью настоящей работы является решение уравнения (2), в котором горизонтальная компонента вектора переноса воздушных масс u является мгновенной характеристикой турбулентных движений и трактуется как случайный параметр.

3. Статистические характеристики горизонтальных атмосферных движений

Для установления закона распределения, которому подчиняются характеристики ветрового режима, была проведена серия экспериментов, заключающихся в определении направления и скорости ветра с минимально возможной дискретностью (5 секунд) при различных синоптических ситуациях (передняя часть и теплый сектор циклона). Результаты каждой серии были обработаны с целью проверки статистической гипотезы о предполагаемой нормальности распределения, так как в силу стохастического характера большинство метеорологических величин имеют нормальный закон распределения.

Для примера приведены результаты проверки гипотезы для серии замеров, проведенной 28.10.2017 г. в Воронеже (синоптическая ситуация – теплый сектор циклона, наблюдается адвективный туман, относительная влажность на протяжении всего периода наблюдений не изменялась и составила 96 %).

Для проверки предположения о нормальности распределения проекции скорости ветра были установлены два уровня значимости (α = 0,05 и 0,1), а также выбраны два метода проверки гипотезы (А. Колмогорова и К. Пирсона) [6]. Для использования указанных методов была выполнена процедура нормирования и центрирования по формуле:

$$Z_j = \frac{u_j - M^*[u]}{\sigma^*(u)}\,, \tag{3}$$

где $M^*[u]$ – оценка математического ожидания проекции скорости ветра; $\sigma^*(u)$ – оценка среднего квадратического отклонения проекции скорости ветра.

На следующем этапе вычислялись численные значения функции Лапласа и теоретической функции распределения проекций скорости ветра. Затем был рассчитан показатель согласованности по формуле:

$$U_к = \sqrt{n}\max_x \left|F(x) - F^*(x)\right|\,, \tag{4}$$

где n – объем выборки (для данной серии наблюдений 2163 случаев); $F(x)$ – теоретическая (предполагаемая) функция распределения проекций скорости ветра; $F^*(x)$ – эмпирическая (выборочная) функция распределения.

По таблицам распределения были определены критические значения показателя согласованности по методу А. Колмогорова. Для α = 0,05 критическое значение составляет 1,358, а для α = 0,1 – 1,224. Если условие $U_к < U_{кр}$ выполняется, то гипотеза о нормальном распределении принимается (результаты расчетов, относящихся к данному примеру, представлены в таблице 1).

Для проверки гипотезы о законе распределения по методу К. Пирсона была определена критическая граница показателя согласованности $U_{кр}$. Значение $U_{п}$ показателя согласованности рассчитывалось по формуле (5).

$$U_{П} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(m_j - np_j)^2}{np_j}. \quad (5)$$

Таблица 1. Результаты проверки гипотезы по критерию А. Колмогорова.

Уровень значимости	Критическая граница $U_{кр}$	Рассчитанная величина $U_{к}$	Вывод
0,05	1,358	0,384	Гипотеза принимается
0,1	1,224	0,384	Гипотеза принимается

Если условие $U_{п} < U_{кр}$ выполняется, то гипотеза о нормальном распределении принимается. Результаты расчетов по методу К. Пирсона представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты проверки гипотезы по методу К. Пирсона.

Уровень значимости	Критическая граница $U_{кр}$	Рассчитанная величина $U_{п}$	Вывод
0,05	403	180	Гипотеза принимается
0,1	392	180	Гипотеза принимается

На основе проведенной проверки по двум критериям, можно сделать вывод, что проекция скорости ветра распределена по нормальному закону.

4. Уравнение переноса влаги со случайными коэффициентами

Определим начальные и граничные условия для уравнения (2). Для этого введем обозначения:

$$s(0;x) = \varphi(x), -\infty < x < \infty; \quad (6)$$

$$s(t;0) = \psi(t), \ t \geq 0. \quad (7)$$

Для решения уравнения (2) с учетом условий (6) и (7) применима стандартная процедура преобразования Лапласа [2, 7, 8]:

$$S(p;x) = \int_0^{\infty} s(t,x) e^{-pt} dt. \quad (8)$$

Тогда с учетом (6) и (7) уравнение (2) в пространстве изображений принимает вид:

$$pS - \varphi(x) + u\frac{dS}{dx} = 0, \quad (9)$$

или

$$u\frac{dS}{dx} + pS = \varphi(x), \ S(0;p) = \Psi(p). \quad (10)$$

В уравнении (10) u и p трактуются как параметры. Это уравнение является линейным, и его решение с использованием метода Бернулли [2] имеет вид:

$$\hat{S}(p;x) = e^{-\frac{p}{u}x} \frac{1}{u}\left(\int \varphi(x) e^{\frac{p}{u}x} dx + u\Psi(p)\right). \quad (11)$$

Учитывая, что в выражении (11) u является случайной величиной, можно определить плотность распределения величины S в пространстве изображений. Пусть $f_u(z)$ – плотность вероятности горизонтальной проекции вектора скорости. Тогда плотность вероятности удельной влажности в пространстве изображений будет определяться соотношением.

$$f_s = f_u\left[u(S)\right] \cdot \left[u(S)\right]' \Big|_{s=z}, \quad (12)$$

где $u(S)$ – обратная к выражению (11) функция.

В общем случае аналитического выражения для этой функции не существует. Поэтому применим приближенный метод, в котором часть случайных слагаемых в выражении (11) сменяется их средними значениями.

Если обозначить в выражении (11) $\frac{1}{u}(\int \varphi(x)e^{\frac{p}{u}x}dx + u\Psi(p))$ через A, то можно записать:

$$\hat{S}(p;x;u) = e^{-\frac{p}{u}x}A. \tag{13}$$

Тогда

$$\ln S = -\frac{px}{u}A; \tag{14}$$

и, как следствие,

$$u = -\frac{Apx}{\ln S}. \tag{15}$$

Производная от обратной функции (15) имеет вид:

$$u'_s = \frac{Apx}{S\ln^2 S}. \tag{16}$$

С учетом выражений (15) – (16) плотность распределения $f_s(z;x;p)$ будет равна:

$$f_S(z;x;p) = -\frac{1}{\sigma^*[u]\sqrt{2\pi}}\frac{Apx}{z\ln^2 z}\exp\left(-\frac{\left[-\frac{Apx}{\ln z} - M^*[u]\right]^2}{2\sigma^*[u]^2}\right),\ z > 0, \tag{17}$$

где $M^*[u]$ и $\sigma^*[u]$– оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения величины u.

Для перехода к плотности вероятности в пространстве оригиналов нужно применить обратное преобразование Лапласа к правой части выражения (17) по переменной p.

5. Заключение

В настоящей статье рассмотрен подход, связанный с учетом турбулентных свойств атмосферы в рамках стохастических методов. Он основан на методах решения стохастических дифференциальных уравнений и позволяет количественно учитывать турбулентные свойства движения воздуха при анализе динамических атмосферных параметров. Показано, что на малых временных интервалах компоненты вектора скорости являются случайными величинами с нормальным законом распределения. Идентифицированы количественные характеристики распределения горизонтального компонента вектора скорости, что позволяет определить плотность распределения удельной влажности.

6.Литература

[1] Матвеев, Л.Т. Физика атмосферы: книга / Л.Т. Матвеев. – СПб.: Гидрометеоиздат, 2000. – 778 с.

[2] Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – Москва: АЙРИС-пресс, 2017. – 608 с.

[3] Zadorozhnii, V.G. A linear firet-order differential equation with ordinary variational derivatives / V.G. Zadorozhnii. – Moscow: Pleiades Publishing, Ltd. – 1993. – Vol. 53. – P. 383-388.

[4] Фрик, П.Г. Турбулентность: Подходы и модели: книга / П.Г. Фрик. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 291 с.

[5] Нечаев, В.Н. Математика. Случайные процессы и их применение в военно-прикладных задачах: учебное пособие / В.Н. Нечаев, А.В. Шуба, Е.В. Голикова. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2016. – 321 с.

[6] Ульшин, И.И. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации: учебное пособие / И.И. Ульшин. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2016. – 178 с.
[7] Oksendal, B. Stochastic differential equations: book / B. Oksendal. – Berlin: Springer, 2003. – 379 p.
[8] Liptser, R.S. Statistics of random processes. 1: General theory / R.S. Liptser, A.N. Shiryaev. – Berlin: Springer, 2001. – 395 p.

A stochastic model of the moisture motion in the atmosphere

V.S. Nozhkin[1], M.E. Semenov[1,2], I.I. Ulshin[1]

[1]MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy», Starikh Bolshevikov, 54A, Voronezh, Russian, 394064
[2]Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh, Russian, 394018

Abstract. The article is devoted to modeling atmospheric moisture motion. The corresponding model formulized as differential equations with stochastic parameter. The experimental results of the wind disturbance also presented. The analytical expression of moisture disturbance is provided in the paper.

Keywords: Random variable, mathematical model, equations with random coefficients.