

# СРАВНИТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОБЫЧНОЙ И ФРАКТАЛЬНОЙ ЗОННОЙ ПЛАСТИНКЕ

К.В. Черезова

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Выполнен расчет дифракции лазерного излучения на фазовой бинарной зонной пластинке и фрактальной линзе в параксиальной области с помощью преобразования Френеля. Фрактальная зонная пластинка формирует тот же набор фокусов, что и обычная зонная пластинка, но происходит расщепление каждого локального фокуса на несколько в зависимости от порядка фрактала.

**Ключевые слова:** зонная пластинка, фрактальные линзы, дифракционный оптический элемент, преобразование Френеля

## Введение

Фракталы являются объектом пристального внимания ученых в различных областях научного знания, в том числе и в оптике. Множество работ по оптике посвящено дифракции света в области Фраунгофера, в частности, показано, что фрактальные дифракционные решетки обладают рядом преимуществ по сравнению с двумерными периодическими структурами, поскольку существенный вклад в суммарную интенсивность дифракционной картины вносят высокие пространственные частоты, соответствующие мельчайшим деталям фрактала [1].

Одной из известных структур дифракционной оптики, относящихся к фракталам, является фрактальная зональная пластина (ФЗП) [2]. ФЗП становятся основными элементами в получении изображения при терагерцевая томография [3], микроскопия мягкого рентгеновского излучения [4, 5]. Актуальность областей использования ФЗП, а также возможность улучшить с помощью них разрешение [6] и производительность классических пластин зон Френеля (за счет многократной фокусировки), инициировали возобновление интереса к ФЗП в течение нескольких последних лет [7-10]. ФЗП используются при полихромном освещении, для разработки новых оптических фильтров с фрактальным спектром пропускания, а также в качестве шифровальных масок в оптической криптографии. Для того чтобы повысить дифракционную эффективность были рассмотрены чисто фазовые ФЗП.

Главной особенностью ФЗП является возможность производить многократные фокусы. Основная доля этих фокусов совпадает с распределением, формируемым стандартной зонной пластинкой, но внутренняя структура каждого фокуса имеет характерную структуру, воспроизводя самоподобие, связанное с фрактальным уровнем пластинки.

В данной работе представлены результаты численных экспериментов по сравнению дифракции лазерного излучения на зонной пластинке и фазовых фрактальных линзах в па-

раксиальной области. Вычисления выполнялись с помощью преобразования Фурье с учетом радиальной симметрии.

### Теоретические основы

Известно, что радиально-симметричные ДОЭ, формируют вдоль оптической оси набор локальных фокусов, распределение которых определяется пространственным спектром от радиальной функции оптического элемента. Используя это свойство, можно формировать определённых последовательностей фокусов и/или нулевых значений, в том числе пропорциональных распределениям специальных функций, например, Эйри и Гаусса–Эрмита [11].

Теоретическое объяснение данного эффекта базируется на сведении преобразования Фурье–Ханкеля к одномерному преобразованию Фурье. Такой подход применялся в различных работах, причем использовался не только для определения продольной картины, формируемой обычными и фрактальными зонными пластинками [2, 8, 12], но и для итерационного расчёта ДОЭ, формирующих заданное распределение вдоль оптической оси [13, 14].

Кроме осевого распределения, важной характеристикой является поперечный размер светового пятна в фокусе. Для оценки этого размера используется полная ширина на уровне полуспада от максимального значения (full width at half maximum англ. FWHM) - ширина, рассчитанная как разница между максимальным и минимальным значениями аргумента функции, взятыми на уровне равном половине её максимального значения.

В случае нормального распределения полная ширина на уровне половинной амплитуды определяется выражением:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (1)$$

где  $\sigma$  есть стандартное отклонение,  $x_0$  может быть любым значением (ширина функции не зависит от переноса). Отношение между FWHM и стандартным отклонением определяется выражением:

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma \approx 2,355\sigma. \quad (2)$$



Рис. 1. Процесс построения множества Кантора

Одним из геометрических фракталов является множество Кантора (рис. 2), которое позволяет математически описать процесс удаления зон пластинки Френеля или их про-

странственное преобразование. Зонные пластинки Френеля представляют собой чередующиеся прозрачные и непрозрачные кольцевые зоны, радиус которых при освещении плоской волной определяется формулой  $r_m = \sqrt{m\lambda b}$ , где  $m$  – номер зоны;  $\lambda$  – длина волны;  $b$  – расстояние до экрана. И она является основой для построения ФЗП [1].

Будем считать, что интенсивность в данной точке на оптической оси, обеспечивается вращением инвариантной функции зрачка, описанной  $R(r)$ , освещенная плоской монохроматической волной. В приближении Френеля эта величина задается как функция от осевого расстояния до плоскости зрачка  $z$  как

$$I(z) = \left( \frac{2\pi}{\lambda z} \right)^2 \left| \int_0^a R(r) \exp\left(-i \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr \right|^2. \quad (3)$$

В уравнении (1)  $a$  – максимальный размер зрачка;  $\lambda$  – длина волны света. Необходимо выразить коэффициент пропускания зрачка как функцию новой переменной, определенной как

$$\xi = \left( \frac{r}{a} \right)^2 - 0,5. \quad (4)$$

таким образом, что  $q(\xi) = p(r)$ . С помощью безразмерной осевой координаты  $u = a^2/2\lambda z$  интенсивность вдоль оптической оси может быть выражена как

$$I(u) = 4\pi^2 u^2 \left| \int_{-0,5}^{0,5} q(\xi) \exp(-i2\pi u \xi) d\xi \right|^2. \quad (5)$$

Из этого результата несложно отметить, что поведение  $I(u)$  в основном определяется квадратным модулем преобразования Фурье.

Рассмотрим теперь функцию зрачка  $q(\xi)$ , которая имеет фрактальную структуру. Таким образом, от известных свойств фракталов и их преобразований Фурье, это приводит к заключению, что такой элемент обеспечивает интенсивность вдоль оптической оси с фрактальным профилем. Мы назвали такой вид зрачка фрактальная зонная пластинка, потому что они могут быть созданы из стандартных зонных пластинок Френеля в некоторых случаях. Несмотря на то, что может использоваться создание структуры ФЗП любого одномерного фрактала, мы сосредоточим внимание на двоичных канторовых множествах.

Известно, что ФЗП состоит из поочередно прозрачных и непрозрачных зон, радиусы которых пропорциональны квадратному корню из натуральных чисел. Бинарная функция с периодом  $p$  может быть записана как

$$q(\xi) = q_{zp}(\xi, p) = \text{rect}(\xi) \text{rect} \left( \frac{\text{mod} \left( \xi + \frac{p-1}{z}, p \right)}{p} \right), \quad (6)$$

где функция  $\text{mod}(x,y)$  дает остаток от деления  $x$  на  $y$ . Рассмотрим частный случай множества Кантора (рис. 2). На первом этапе ( $S=1$ ) начальный отрезок делится на нечетное количество число сегментов  $2N-1$ , и сегменты в четных позициях удаляются. Оставшиеся  $N$  сегментов первого этапа также делятся и удаляются и т.д. В математических терминах функция коэффициента пропуска ФЗП может быть описана как периодическая функция

$$q(\xi) = q_{\text{ЗП}}(\xi, NS) = \prod_{i=0}^S q_{\text{ЗП}}\left(\xi, \frac{2}{(2N-1)^i}\right). \quad (7)$$

Рисунок 2 показывает ФЗП, сгенерированную из триадического множества Кантора при  $S=5$ .

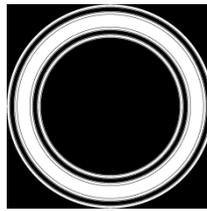


Рис.2. ФЗП 5 порядка генерации

### Численные результаты

Разрешающая способность линзы зависит от его числовой апертуры и длины волны света, при которой ведется наблюдение объекта.

Рассмотрим дифракцию плоской ограниченной волны на обычной зонной пластинке и ФЗП в параксиальной области. Для получения результатов воспользуемся преобразованием Френеля:

$$U(\xi, \eta, z) = \frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) \exp\left[\frac{ik}{2z}((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)\right] dx dy \quad (8)$$

Для расчетов были использованы следующие параметры: длины волны  $\lambda = 0,000532$  мм, радиус элемента  $R = 3$  мм, фокус обычной зонной пластинки  $f = 2500$  мм, что соответствует числовой апертуре  $NA = 0,0012$ . На рис. 3-5 показаны результаты расчетов, позволяющие сравнить дифракцию на обычной и фрактальной зонной пластинке.

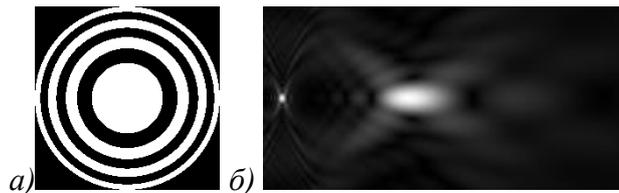
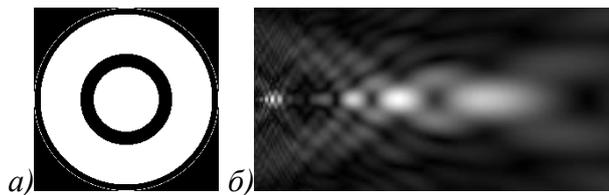
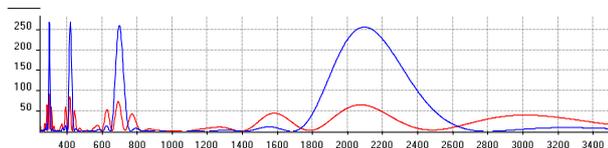


Рис. 3. Дифракция на обычной зонной пластинке: а) фаза оптического элемента, б) распределение амплитуды в области  $x \in [-1 \text{ мм}, 1 \text{ мм}]$ ,  $z \in [500 \text{ мм}, 4500 \text{ мм}]$



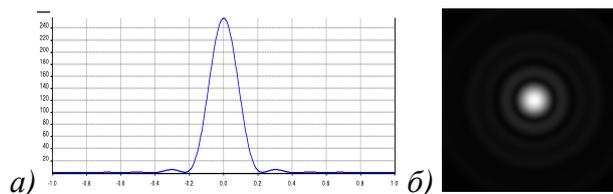
**Рис. 4.** Дифракция на фрактальной зонной пластинке: а) фаза оптического элемента, б) распределение амплитуды в области  $x \in [-1 \text{ мм}, 1 \text{ мм}]$ ,  $z \in [500 \text{ мм}, 4500 \text{ мм}]$



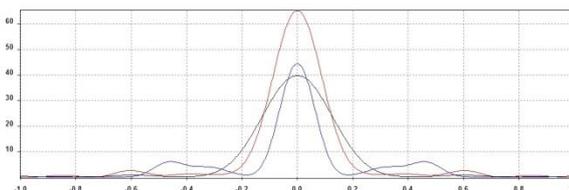
**Рис. 5.** Распределение интенсивности на оптической оси для обычной зонной пластинки (синий цвет) и фрактальной (красный цвет)

Известно [12], что бинарные зонные пластинки формируют кроме основного фокуса еще набор локальных фокусов. График на рисунке 5 наглядно показывает, что при использовании ФЗП формируются тот же набор фокусов, что и обычной зонной пластинкой, но происходит расщепление каждого локального фокуса на несколько (в соответствии с порядком фрактала). Это, с одной стороны, приводит к уменьшению интенсивности в каждом из расщепленных фокусов, но с другой стороны, обеспечивает те свойства, что делает полезным ФЗП в различных приложениях. В частности, в обработке изображений белым светом. Известно, что ФЗП увеличивает производительность формирования изображения с увеличенной глубиной резкости и уменьшает хроматическую aberrацию при освещении белым светом[7].

На рисунках 6-8 представлены графики распределение интенсивности вдоль оси  $z$  и изображения интенсивности для зонной пластинки и фрактальной зонной пластинки 3 порядка, для значений  $z = 1581 \text{ мм}$ ,  $z = 2073 \text{ мм}$ ,  $z = 3000 \text{ мм}$ .



**Рис. 6.** а) Распределение интенсивности на оптической оси для зонной пластинки для значения  $z = 2095 \text{ мм}$ , б) интенсивность зонной пластинки



**Рис. 7.** а) Распределение интенсивности на оптической оси для ФЗП 3 порядка для значения  $z = 1581 \text{ мм}$  (синяя линия),  $z = 2073 \text{ мм}$  (красная линия),  $z = 3000 \text{ мм}$  (черная линия)

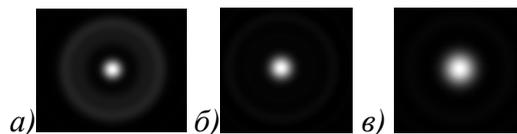


Рис. 8. а) интенсивность зонной пластинки для ФЗП 3 порядка для значения  $z = 1581$  мм,  $z = 2073$  мм,  $z = 3000$  мм

В таблице 1 приведены размеры световых пятен в фокальных плоскостях для зонной пластинки и ФЗП третьего порядка.

Табл.1. Значение характеристики FWHM для зонной пластинки и ФЗП 3 порядка

<b>1 фокус</b>		<b>FWHM (<math>z = 391</math> мм) = 0,0332</b>
		FWHM ( $z = 416$ мм) = 0,0382
	<b>FWHM (<math>z = 418</math> мм ) = 0,0377</b>	FWHM ( $z = 443$ мм) = 0,0409
<b>2 фокус</b>		FWHM ( $z = 629$ мм) = 0,0559
	FWHM ( $z = 697$ мм ) = 0,0634	FWHM ( $z = 693$ мм) = 0,06637
		FWHM ( $z = 770$ мм) = 0,0747
<b>3 фокус</b>		FWHM ( $z = 1581$ мм ) = 0,1472
	FWHM ( $z = 2095$ мм) = 0,1918	FWHM ( $z = 2073$ мм) = 0,2065
		FWHM ( $z = 3000$ мм) = 0,2938

Из таблицы 1 видно, что у зонной пластинки вместо одного фокуса с радиусом фокального пятна равным 0,1918 мм при  $z = 2095$  мм, у ФЗП 3 порядка формируется 3 фокуса, из которых один фокус равен при  $z = 1581$  мм, другой больше при  $z = 2073$  мм, третий меньше при  $z = 3000$  мм.

На рисунке 8 представлены графики распределение интенсивности вдоль оси  $z$  и изображения фазы фрактальной зонной пластинки 3 порядка, для значений  $z = 1581$  мм,  $z = 2073$  мм,  $z = 3000$  мм.

## Заключение

Выполнен расчет дифракции лазерного излучения на фазовой бинарной зонной пластинке и фрактальной линзе в параксиальной области с помощью преобразования Френеля. Получено, что бинарные зонные пластинки формируют кроме основного фокуса еще набор локальных фокусов. В ФЗП формируются тот же набор фокусов, что и обычной зонной пластинкой, но происходит расщепление каждого локального фокуса на несколько. Эти расщепления приводят к потере энергии, но полученные свойства полезны при обработке изображений белым светом с помощью ФЗП. В частности, ФЗП успешно используются в получении изображения при терагерцевая томография, микроскопия мягкого рентгеновского излучения.

## Литература

1. Зинчик, А.А. О принципах амплитудной и амплитудно-фазовой пространственной фильтрации. / А.А.Зинчик, Я.Б.Музыченко, С.К. Стафеев. // Известия вузов. Приборостроение. - 2007. - Т.50,№7. - С. 46-52
2. Saavedra, G. Fractal zone plates / G. Saavedra, W.D. Furlan, J.A. Monsoriu // Opt. Lett. – 2003. – Vol. 28, N 12. – P. 971-973.
3. Wang, S. Terahertz tomographic imaging with a Fresnel lens / S. Wang Zhang X // Opt. Photon. News. – 2002. –№ 13. – P. 59.

4. Kipp, L. Sharper images by focusing soft x-rays with photon sieves/ L. Kipp, M. Skibowski, R. L. Johnson, R. Berndt, R. Adelung, S. Harm, and R. Seemann// *Nature*. – 2001. – № 414. – P. 184-188.
5. Wang, Y. Achromatic Fresnel optics for wideband extreme-ultraviolet and X-ray imaging / Y. Wang, W. Yun, C. Jacobsen // *Nature*. – 2003. – № 424. – P. 50–53.
6. Cao, Q. Modified Fresnel zone plates that produce sharp Gaussian focal spots/ Q. Cao, J. Jahns // *Opt. Soc. Am.* – 2003. - № 20. – P. 1576-1581.
7. Furlan, W. D. White-light imaging with fractal zone plates/ W. D. Furlan, G. Saavedra, J. A. Monsoriu// *Opt. Lett.* – 2007. – Vol. 32. – P. 2109–2111.
8. Casanova, C. Self-similar focusing with generalized devil’s lenses / C. Casanova, W.D. Furlan, L. Remón, A. Calatayud, J.A. Monsoriu, O. Mendoza-Yero // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2011. – Vol. 28, N 2. – P. 210-213.
9. Ge, X. Use of fractal zone plates for transmission x-ray microscopy/ X. Ge, Z. Wang, K. Gao, D. Wang, Z. Wu, J. Chen, Z. Pan, K. Zhang, Y. Hong, P. Zhu, and Z. Wu // *Anal. Bioanal. Chem.* – 2012. – Vol. 404. – P. 1303–1309.
10. Siemion, A. Diffractive paper lens for terahertz optics/ A. Siemion, M. Makowski, J. Suszek, J. Bomba, A. Czerwinski, F. Garet, J.-L. Coutaz, and M. Sypek, // *Opt. Lett.* . – 2012 – Vol. 37. – P. 4320–4322.
11. Хонина С.Н. Расчёт линз для формирования параксиального продольного распределения в соответствии с их пространственным спектром/ С.Н. Хонина, А.В. Устинов. // *Компьютерная оптика*, – 2013. - Т.37, № 2. С. 193-202.
12. Хонина, С.Н. Бинарная линза: исследование локальных фокусов / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Р.В. Скиданов // *Компьютерная оптика*. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 339-346.
13. Khonina, S.N. Calculation of the focusators into a longitudinal line segment and study of a focal area / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer // *J. Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40(5). – P. 761-769
14. Котляр, В.В. Фазовые формирователи световых полей с продольной периодичностью / В.В. Котляр, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина // *Оптика и спектроскопия*. – 1998.-Т.84, № 5. - С. 853-859.