

# Спектр вихрей возмущенного сингулярного пучка и информационная энтропия Шеннона

Я.Е. Акимова<sup>1</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>, Ю.А. Егоров<sup>1</sup>, А.В. Воляр<sup>1</sup>, В. В. Милоков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт, проспект Академика Вернадского 4, Симферополь, Россия, 295007

**Аннотация.** Показано преобразования вихревых пучков, подвергнутых секторным возмущениям в виде диафрагмы с жесткими краями. Исследованы преобразования вихревых спектров, орбитального углового момента и информационной энтропии возмущенного пучка. Было обнаружено, что относительно небольшие угловые возмущения пучков почти не влияют на ОУМ, хотя информационная энтропия быстро увеличивается из-за рождения новых оптических вихрей, вызванных дифракцией на краях диафрагмы.

## 1. Введение

Широкое использование световых пучков, переносящих орбитальный угловой момент (ОУМ) в оптических системах передачи и обработки информации [1, 2], предполагает устойчивость их сингулярной структуры относительно слабых возмущений. Также считалось, что пучки Бесселя способны частично восстанавливать структуру при прохождении среды со слабой турбулентностью [3]. Аналогичные свойства были обнаружены и у других типов вихревых пучков [4]. Сразу возникает вопрос, как оценивать степень восстановления свойств такого вихревого пучка? Очевидно, что такая оценка зависит от того, для каких целей и в каких оптических системах используются возмущённые пучки.

Например, секторные препятствия вводят некоторую меру неопределенности в вихревой пучок [5] между орбитальным угловым моментом (ОУМ) и секторным препятствием, что, в свою очередь, запускает цепочку событий рождения и уничтожения вихрей, увеличивая число новых вихревых состояний. С другой стороны, информационные свойства вихревого пучка в целом значительно ухудшаются. Действительно, рост внутренней неопределенности в структуре пучка, вызванной апертурой сектора, указывает на значительные изменения в таких физических характеристиках, как информационная энтропия. Основные проблемы анализа информационной энтропии (или энтропии Шеннона) в световых пучках были подробно рассмотрены авторами [6].

Мы обратили внимание на тот факт, что в общем случае информационная энтропия характеризует вихревой пучок в целом. Кроме того, основной вклад в информационную энтропию вносят изменения числа вихревых состояний в пучке, подверженном внешним возмущениям. Эти исследования указывают на связь между вихревым спектром возмущенного пучка, ОУМ и информационной энтропией. Таким образом, целью нашей работы является экспериментальное измерение информационной энтропии и ОУМ возмущенного вихревого пучка на основе анализа их вихревых спектров.

## 2. Теоретическая модель пучка и метод измерения

Рассмотрим прохождение скалярного лазерного пучка Лагерра-Гаусса  $LG_0^m$  с азимутальным индексом (топологическим зарядом)  $m$  и нулевым радиальным индексом  $p=0$  через непрозрачный сектор с углом  $\alpha$ . Вершина сектора касается оси пучка. Тогда, поле пучка в начальной плоскости  $z=0$  записывается как

$$\Psi_m(r, \varphi, \alpha) = (\rho/w)^{|m|} e^{im\varphi} e^{-\rho^2/w^2} = r^{|m|} e^{im\varphi} e^{-r^2}, \quad \alpha < \varphi < 2\pi - \alpha, \quad (1)$$

где  $r = \rho/w$ .  $w$  - радиус перетяжки пучка в  $z=0$ ,  $\rho$  и  $\varphi$  полярные координаты. Запишем поле пучка (1), прошедшего непрозрачный сектор в виде ряда ненормированных пучков Лагерра-Гаусса  $LG_p^m$  в форме

$$\Psi_m(r, \varphi, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}(\alpha) LG_0^n(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}(\alpha) r^{|n|} e^{in\varphi} e^{-r^2}, \quad (2)$$

где амплитуды пучка определяются как

$$C_{m,n}(\alpha) = (-1)^{m-n} \Gamma\left(\frac{|m|+|n|}{2} + 1\right) \frac{\text{sinc}[(m-n)(\pi-\alpha)]}{m-n} / \left(\pi 2^{\frac{|m|-|n|}{2}} |n|\right), \quad (3)$$

$\Gamma(x)$  - Гамма функция. Слагаемые в ряде (2) с радиальными индексами  $p \neq 0$  исчезают из-за ортогональности моды LG. Анализ вихревого спектра (зависимость интенсивности нормированной вихревой моды  $\bar{C}_{m,n}^2(\alpha)$  от топологического заряда  $n$ ) позволяет восстановить первоначальную форму пучка и найти его ОУМ. ОУМ пучка, возмущенного сингулярного пучка определяется как

$$\ell_z(\alpha, m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \bar{C}_{m,n}^2(\alpha) / \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_{m,n}^2(\alpha) \quad (4)$$

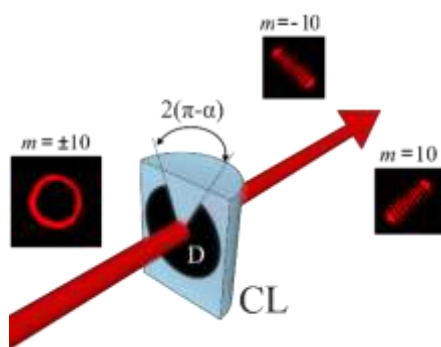
Информационная энтропия также может быть представлена через квадраты амплитуд

$$S_I = - \sum_{n=0}^N C_n^2(\alpha, m) \log_2 C_n^2(\alpha, m) \quad (5)$$

## 3. Эксперимент и обсуждение результатов

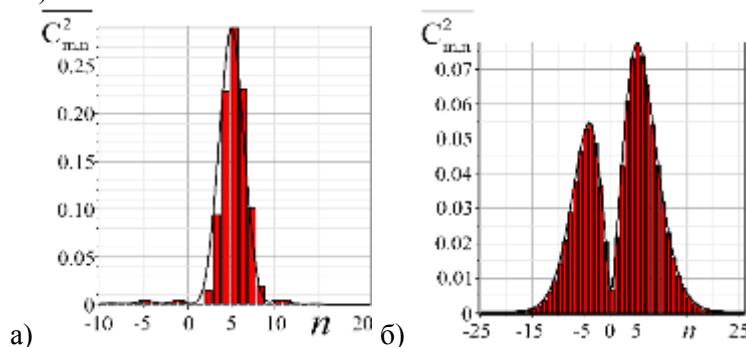
Основная идея измерительного процесса заключалась в разделении пучков как по знаку топологического заряда, так и по его величине. В нашем случае такое разделение осуществляется в виртуальном пространстве компьютера в соответствии с откликом вихревых мод на моменты интенсивности высших порядков [7]. Для формирования возмущенных вихревых пучков мы отказались использовать секторные голограммы на пространственном модуляторе SLM, поскольку при измерениях моментов интенсивности высших порядков возникали большие погрешности из-за неучтенных краевых эффектов на секторных голограммах. Вместо этого использовалась металлическая секторная диафрагма (D) с регулируемым углом сектора, которая устанавливалась непосредственно перед цилиндрической линзой (CL), как показано на рисунке 1. Таким образом, сначала на SLM-модуляторе формировался ЛГ-пучок с заданным топологическим зарядом  $m$ . Затем секторное возмущение с заданным углом  $\alpha$  создавалось диафрагмой (D) и преобразовывалось цилиндрической линзой CL, и далее регистрировалось CCD-камерой, установленной в плоскости двойного фокуса CL-линзы.

Спектр вихрей выводился на экран монитора после соответствующей обработки изображения пучка. Для измерений использовался SLM-модулятор типа (Thorlabs EXULUS-4K1) и CCD-камера типа (Thorlabs DCC1645). Заметим, что при построении поля возмущенного пучка мы использовали амплитуды мод  $C_{m,n}$  полученные в выражении (3), где функция поля мод не нормирована. Однако, при вычислении спектра квадратов амплитуд, ОУМ и энтропии Шеннона следует использовать амплитуды, полученные при условии нормировки. Между такими амплитудами существует простое соотношение  $\bar{C}_{m,n}^2 = 2^{-|n|-2} |n|! C_{m,n}^2$ .



**Рисунок 1.** Эскиз секторной апертуры (D) в плоскости цилиндрической линзы (CL).

Анализ вихревых спектров показал, что в интервале углов  $\alpha \in (0, 45^\circ)$  происходит слабая перекачка энергии из основной гармоники с  $m = 5$  в соседние моды (рисунок 2а). Однако, по мере увеличения угла  $\alpha$  симметрия нарушается. После угла  $\alpha = 90^\circ$ , при котором вырезается половина светового потока, в отрицательной области спектра  $n < 0$  наблюдается зеркальный максимум (рисунок 2б).

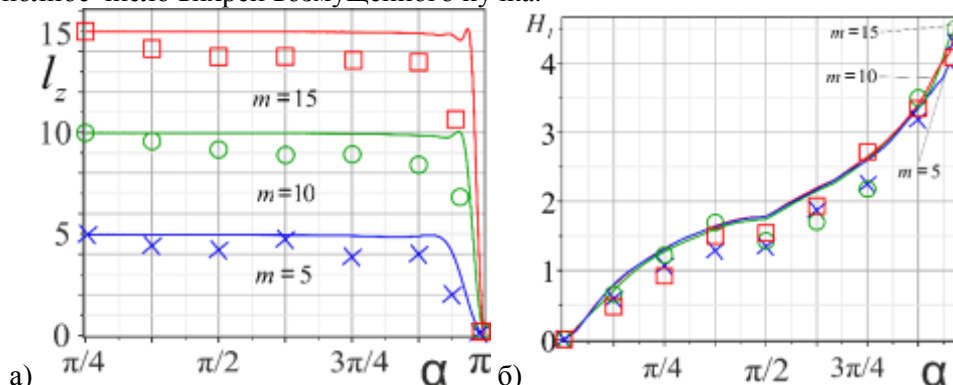


**Рисунок 2.** Спектр квадратов амплитуд для сингулярного пучка с  $m = 5$  : а) для  $\alpha = \pi/6$  ; б) для  $\alpha = 3\pi/4$ .

Согласно выражению (4), ОУМ однозначно задаётся вихревыми модами  $\bar{C}_{m,n}^2(\alpha)$ , так что всякие изменения в спектре вихрей немедленно отражаются на спектре ОУМ. Используя полученные спектры, мы построили график зависимости ОУМ от угла сектора  $\alpha$  (рисунок 3а). Для возмущенных состояний  $|m\rangle = 5, 10$  и  $15$  ОУМ  $\ell_z(\alpha)$  практически не менялся в широком интервале углов  $\alpha \in (0, 90^\circ)$ , поскольку нет существенных изменений в спектре вихрей. В этом интервале происходит слабая перекачка энергии в спектрах  $\bar{C}_{m,n}^2(\alpha)$ . Но как только, происходит приток энергии во второй максимум (отрицательная область) ОУМ стремительно уменьшается, так что при достаточно больших углах  $\alpha \approx 178^\circ$  ОУМ снижается практически до нуля.

В отличие от ОУМ информационная энтропия возрастает уже при сравнительно небольших углах возмущения  $\alpha$ , поскольку число возбуждённых вихревых состояний возрастает, хотя переносимая ими энергия мала. При  $\alpha = 90^\circ$  скорость изменения энтропии (направление касательной к кривой  $H_I(\alpha)$  изменяется, поскольку скорость рождения новых вихревых состояний начинает быстро возрастать (рисунок 3б). Характерно, что на этом интервале углов кривые  $H_I(\alpha)$  для различных  $m$  почти совпадают. Это указывает на идентичность процессов возбуждения вихревых состояний для различных топологических зарядов. Заметим, что информационная энтропия характеризует изменение числа вихрей в возмущённом пучке. Если ОУМ характеризуется относительным вкладом разности интенсивностей вихревых мод с

противоположными знаками топологических зарядов (см. формулу (4)), то энтропия Шеннона учитывает полное число вихрей возмущённого пучка.



**Рисунок 3.** Компьютерное моделирование ОУМ  $l_z(\alpha)$  (а) и энтропии Шеннона  $H_1$  (б) для топологических зарядов  $m = 5, m = 10, m = 15$  (линии), крестикам ( $\times$ ), кружкам (0) и квадратикам ( $\square$ ) соответствуют экспериментальным точкам.

Исследование спектров вихрей показали, что изменением спектра вихрей управляет оптический принцип неопределённости между углом секторной апертуры и ОУМ, который существенно сказывается на спектре вихрей при очень больших секторных углах. При малых углах секторной диафрагмы в формировании спектра участвуют вихревые пучки с одинаковым знаком топологического заряда, однако при больших углах возмущения в отрицательной области топологических зарядов формируется зеркальный максимум. Энтропия Шеннона определяется числом вихрей, вызванных возмущением. Поэтому по мере увеличения угла возмущения энтропия монотонно возрастает.

#### 4. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-01233.

#### 5. Литература

- [1] Yao, A.M. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications / A.M. Yao, M.J. Padgett // *Advances in Optics and Photonics*. – 2011. – Vol. 3. – P. 161-204.
- [2] Willner, A.E. Optical communications using orbital angular momentum beams / A.E. Willner, H. Huang, Y. Yan, Y. Ren, N. Ahmed, G. Xie, C. Bao, L. Li, Y. Cao, Z. Zhao, J. Wang, M.P.J. Lavery, M. Tur, S. Ramachandran, A.F. Molisch, N. Ashrafi, S. Ashrafi // *Advances in Optics and Photonics*. – 2015. – Vol. 7. – P. 66-106.
- [3] Li, S. Adaptive free-space optical communications through turbulence using self-healing Bessel beams / S. Li, J. Wang // *Scientific Reports*. – 2017. – Vol. 7. – P. 43233.
- [4] Vyas, S. Self-healing of tightly focused scalar and vector Bessel–Gauss beams at the focal plane / S. Vyas, Y. Kozawa, S. Sato // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2011. – Vol. 28(5). – P. 835-843.
- [5] Malik, M. Measurement of the orbital-angular-momentum spectrum of fields with partial angular coherence using double-angular-slit interference / M. Malik, S. Murugkar, J. Leach, R.W. Boyd // *Physical Review A*. – 2012. – Vol. 86. – P. 063806.
- [6] Yu, F.T.S. *Entropy and information optics* – New York: Marcel Dekker Inc., 2000. – 528 p.
- [7] Воляр, А.В. Формирование и анализ спектров оптических вихрей сингулярных пучков с аномалиями орбитального углового момента / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 4. – С. 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.

## Vortex spectrum of perturbed singular beam and informational Shannon entropy

Ya.E. Akimova<sup>1</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>, Yu.A. Egorov<sup>1</sup>, A.V. Volyar<sup>1</sup>, V. V. Milyukov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Physical Technical Institute, Prospekt Vernadskogo 4, Simferopol, Russia, 295007

**Abstract.** We demonstrated transformations of vortex beams subjected to sector disturbances in the form of a diaphragm with hard edges. The transformations of the vortex spectra, the orbital angular momentum, and the informational entropy of the perturbed beam are studied. We found that relatively small angular perturbations of the sectors have almost no effect on the OAM, although the information entropy is rapidly increasing due to the birth of new optical vortices caused by diffraction at the edges of the diaphragm, while the information entropy sharply increases.