Смешанное деформирование тел с разрезами в связанной постановке (ползучесть – поврежденность)

Е.А. Миронова[a], Л.В. Степанова[a]

[a] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия*

Аннотация

Изучение процессов разрушения и нелинейного деформирования конструкций является актуальной задачей современной механики деформируемого твердого тела и прикладной математики: целесообразно создание многомасштабных (многоскейлинговых) математических моделей, описывающих взаимосвязь микроструктуры материала и ее влияние на макроскопические свойства материала. Взаимосвязь микроскопических и макроскопических параметров можно отразить с помощью введения иерархической цепочки областей, окружающих вершину трещины и имеющих различную сингулярность поля напряжений в ее окрестности в каждой из зон. Путем введения зон с различной особенностью поля напряжений задача сводится к нелинейной задаче на собственные значения. В работе предложен метод численного определения всего спектра собственных значений нелинейной задачи для всех значений параметра смешанности нагружения.

Ключевые слова: континуальная механика поврежденности; смешанное нагружение; автомодельная переменная; напряженно-деформированное состояние; поврежденность

1. Введение

Математическое описание процессов нелинейного деформирования и разрушения материалов является актуальной проблемой современной механики сплошных сред и активно исследуется в настоящее время как в нашей стране [8-10, 13-14], так и за рубежом [1-7,11]. Вопросы, связанные с решением нелинейных задач на собственные значения, вызывают большой интерес, например, в работе [12] предложен метод решения двойственных задач, который позволяет получить распределение скоростей вблизи вершины клина. Особый интерес вызывает взаимное влияние процессов накопления повреждений на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины, и обратно, влияние эволюции напряженно-деформированного состояния на накопление повреждений у вершины трещины в деформируемом теле. Аккуратное описание полей напряжений, деформаций и поврежденности у вершины трещины требует введение иерархической цепочки областей с различной сингулярностью поля напряжений у вершины трещины и процедуры последующего сращивания асимптотик на границе рассматриваемых областей. В этой связи перспективным и эффективным методом решения краевых задач определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в среде с поврежденностью является метод разложения по собственным функциям, который широко применяется для определения механических полей у вершины трещины в материалах с нелинейными конституциональными уравнениями [8-10,14]. В рамках метода разложения по собственным функциям решение (компоненты тензора напряжений, скоростей деформаций и поврежденность) разыскивается в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от угловой координаты и подлежит определению, а другая представляет собой расстояние от кончика дефекта в некоторой степени. Степень и функция, определяющая зависимость механической величины от угловой координаты, подлежат определению. В работах [8-10] показано, что метод разложения по собственным функциям приводит к нелинейным задачам на собственные значения, решения которых и обуславливает асимптотику поля напряжений у вершины трещины, поскольку собственное значение нелинейной задачи представляет собой степень радиальной переменной в асимптотической решении. Одно из собственных значений рассматриваемого класса нелинейных задач на собственные значения, хорошо известно и соответствует собственному значению задачи Хатчинсона-Райса-Розенгрена (ХРР) [1,14]. Возможные другие решения нелинейных задач на собственные значения и представляют интерес и могут привести к новым частным решениям краевых задач определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в среде с поврежденностью. В настоящей работе предложен метод численного решения нелинейных задач на собственные значения, следующих из проблем определения полей напряжений и сплошности у вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм нагружения от чистого нормального отрыва до чистого поперечного сдвига. Показано, что в частном случае асимптотики ХРР предлагаемый метод позволяет найти собственное значение, отвечающее задаче ХРР. Наряду с известным собственным значением определены новые собственные значения, с помощью которых можно описать различную особенность поля напряжений в окрестности вершины трещины при смешанном нагружении элемента конструкции с дефектом.

2. Математическая постановка задачи. Основные уравнения

Определение напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины приводит к системе уравнений: системе уравнений равновесия и совместности

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{r\theta}}{r}=0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}=0,$$

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2}-r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r}+r\frac{\partial^2 (r\varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \tag{1}$$

Компоненты скорости деформации ползучести, позволяющие связать деформации и напряжения, имеют следующий вид: $\varepsilon_{rr}=B\sigma_e^{n-1}(2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})/2$, $\varepsilon_{\theta\theta}=B\sigma_e^{n-1}(2\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr})/2$, $\varepsilon_{r\theta}=3B\sigma_e^{n-1}2\sigma_{r\theta}/2$. В работе было получено асимптотическое решение задачи на основе введения функции напряжений Эри, асимптотическое представление которой в окрестности вершины трещины имеет следующий вид: $\chi(r,\theta)=r^{\lambda+1}f(\theta)$. Условие совместности деформации позволяет получить нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
&f_e^2(f)^{IV}\{(n-1)[(1-\lambda^2)f+(f)"]^2+f_e^2\}+(n-1)(n-3)\times\\
&\times\{[(1-\lambda^2)f+(f)"][(1-\lambda^2)(f)'+(f)"]+4\lambda^2(f)(f)"\}^2[(1-\lambda^2)f+(f)"]+\\
&+(n-1)f_e^2([(1-\lambda^2)(f)'+(f)"]^2+[(1-\lambda^2)(f)'+(f)"](1-\lambda^2)(f)"+\\
&+4\lambda^2(f"^2+f'f"))[(1-\lambda^2)f+(f)"]+2(n-1)f_e^2\times\\
&\times\{[(1-\lambda^2)(f)'+(f)"][(1-\lambda^2)(f)'+(f)"]+4\lambda^2(f)(f)"\}[(1-\lambda^2)(f)'+(f)"]+\\
&+C_1(n-1)f_e^2\{[(1-\lambda^2)(f)'+(f)"][(1-\lambda^2)(f)'+(f)"]+4\lambda^2(f)(f)"\}(f)'+\\
&+C_1f_e^4(f)"-C_2f_e^4[(1-\lambda^2)(f)'+(f)"]+f_e^4(1-\lambda^2)(f)"=0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $C_1=4\lambda[(\lambda-1)n+1]$, $C_2=(\lambda-1)n[(\lambda-1)n+2]$.

3. Асимптотическое решение задачи. Алгоритмы численного решения нелинейной задачи на собственные значения

Решение представленного НДОУ (2) должно удовлетворять граничным условиям – условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины: $f(\theta=\pm\pi)=0$, $(f)'(\theta=\pm\pi)=0$. В случае рассмотрения трещин нормального отрыва и поперечного сдвига используют условия симметрии и антисимметрии, в соответствии с которыми уравнение (2) интегрируется на отрезке $[0,\pi]$ с начальными условиями для трещины I типа $f(0)=1$, $f'(0)=0, f"(0)=A_2, f'''(0)=0$ и для трещин II типа $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f"(0)=0$, $f'''(0)=A_3$. Для случая смешанного деформирования на отрезке $[-\pi,\pi]$ условия симметрии и антисимметрии быть применены не могут. Для нахождения всего спектра собственных значений отрезок интегрирования разбивается на два $[-\pi,0]$ и $[0,\pi]$.

Для реализации смешанного нагружения в определяющие соотношения материала был введен параметр смешанности нагружения (3), принимающий значение равное 1 в случае нормального отрыва (тип I) и принимает значение равное 0 в случае поперечного сдвига (тип II); $0<M^p<1$ для всех промежуточных типов приложенной нагрузки. Впервые исследование смешанных форм деформирования было проведено в работах [6,7], где автором был введен параметр смешанности нагружения:

$$M^p=\frac{2}{\pi}arctg\left|\lim_{r\to 0}\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta=0)}{\sigma_{r\theta}(r,\theta=0)}\right| \tag{3}$$

Таким образом, уравнение (2) интегрируется на отрезке $[0,\pi]$ с начальными условиями $f(0)=1$, $f'(0)=-(\lambda+1)/tg(M^p\pi/2)$, $f"(0)=A_2, f'''(0)=A_3$. Неизвестные параметры A_2 и A_3 находятся из условий отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины. После построения численного решения на рассматриваемом отрезке интегрирования рассматривается отрезок $[-\pi,0]$, где двухточечная краевая задача заменяется задачей Коши с начальными условиями $f(-\pi)=0$, $f'(-\pi)=0$, $f"(-\pi)=B_2$, $f'''(-\pi)=B_3$. Неизвестные постоянные B_2и B_3 подбираются таким образом, чтобы выполнялась непрерывность компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$. В работе были найдены собственные значения задачи (для последовательного описания уровней разрушения на удалении от вершины трещины), отличные от работы Хатчинсона-Райса-Розенгрена (ХРР). При интегрировании уравнения (2) отыскивались три неизвестные λ, A_2 и A_3, были использованы условия – отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины, дополнительным условием накладывалось условие непрерывности радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} [8-10]. В результате вычислений были определены новые собственные значения, отличные от собственных значений, соответствующих задаче ХРР для различных показателей параметра смешанного нагружения M^p. Для численного отыскания всего спектра собственных значений был использован один из методов семейства Рунге-Кутты-Фельдберга и метод пристрелки.

На рис. 1–3. представлены полученные угловые распределения тензора напряжений для всего диапазона параметра смешанности нагружения. Результаты вычислений приведены в таблице 1-2, где собраны новые вычисленные собственные значения и пристрелочные значения $f"(0)$, $f'''(0), f"(-\pi)$, $f'''(-\pi)$ для всех значений параметра смешанности нагружения M^p. На основе использования новой асимптотики поля напряжений [9,10] были построены новые угловые распределения тензора напряжений и области диспергированного материала у вершины трещины с учетом процесса накопления повреждений (рис. 4.).

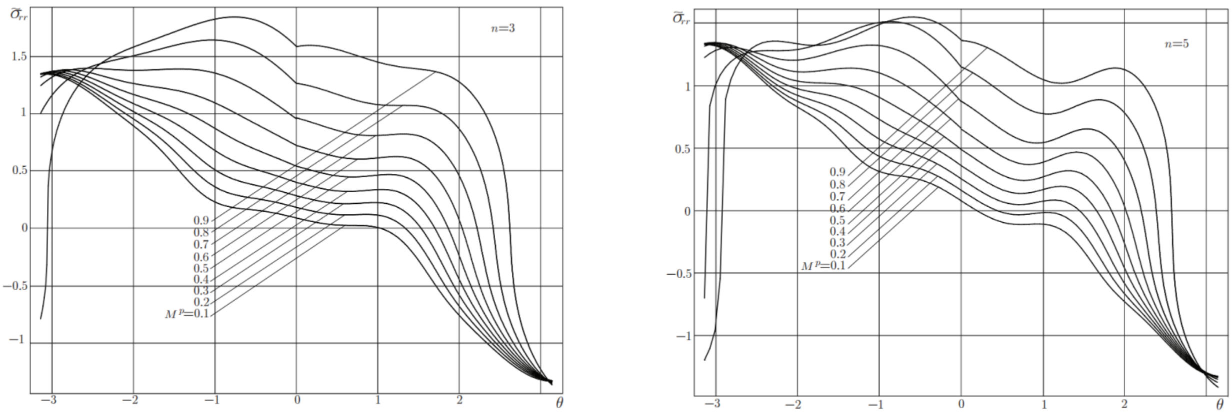

Рис. 1. Угловые распределения компоненты тензора напряжения σ_{rr} для n=3 и n=5, для различных значений параметра смешанности нагружения.

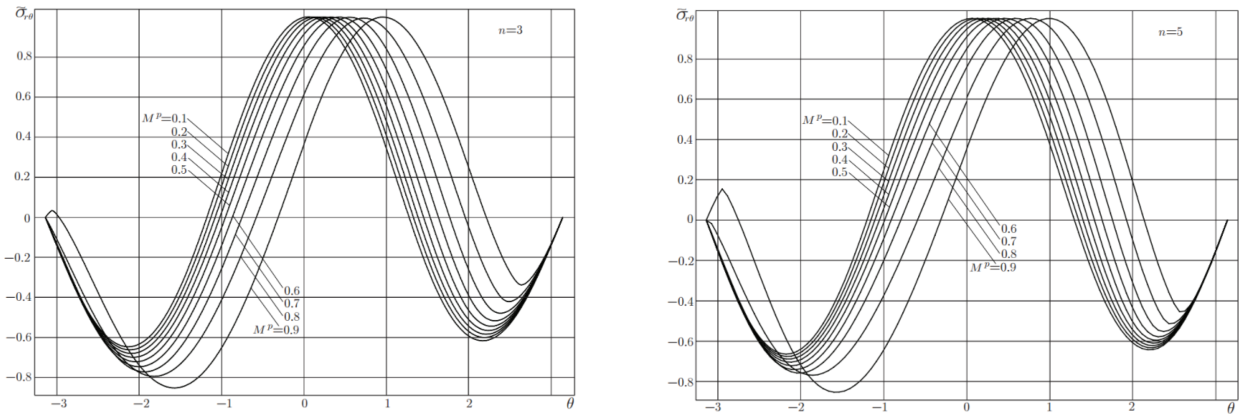

Рис. 2. Угловые распределения компоненты тензора напряжения $\sigma_{r\theta}$ для n=3 и n=5, для различных значений параметра смешанности нагружения.

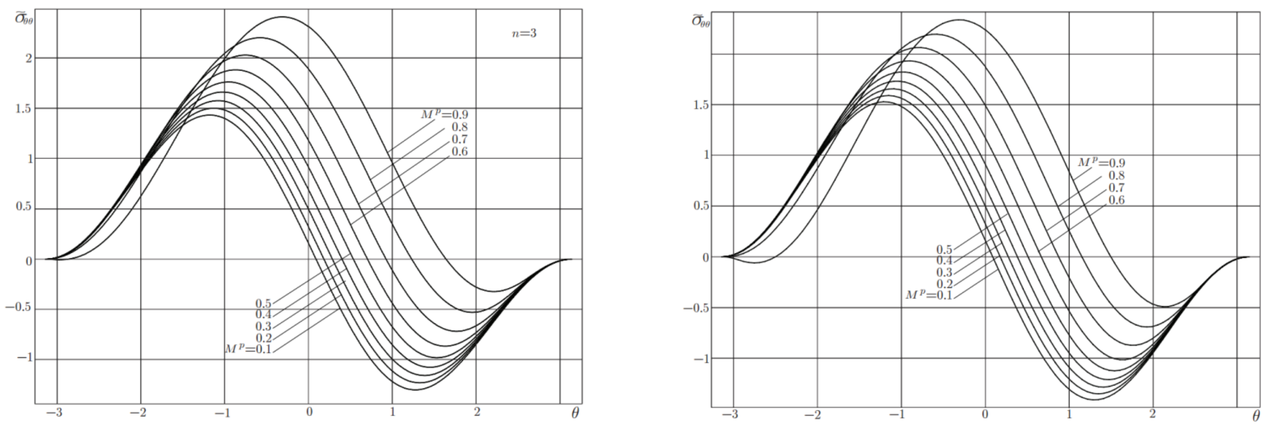

Рис. 3. Угловые распределения компоненты тензора напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для n=3 и n=5, для различных значений параметра смешанности нагружения.

Таблица 1. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения (n=3)

M^p	λ	$f''(0) = A_2$	$f'''(0) = A_3$	$f''(-\pi) = B_2$	$f'''(-\pi) = B_3$
M^p = 0.1	0.749848	-1.013966	17.949395	11.168800	0.517892
M^p = 0.2	0.749363	-1.009897	8.737115	5.496914	0.424696
M^p = 0.3	0.748445	-1.002586	5.547736	3.55915	0.400979
M^p = 0.4	0.746893	-0.991172	3.860179	2.551472	0.398938
M^p = 0.5	0.744332	-0.974434	2.770084	1.910267	0.412827
M^p = 0.6	0.740101	-0.951094	1.979071	1.442531	0.449823
M^p = 0.7	0.732500	-0.918650	1.367524	1.051410	0.543569
M^p = 0.8	0.721600	-0.888990	0.899719	0.661603	0.907319

Таблица 2. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения (n=5)

M^p	λ	$f''(0) = A_2$	$f'''(0) = A_3$	$f''(-\pi) = B_2$	$f'''(-\pi) = B_3$
M^p = 0.1	0.833249	-1.059009	17.175337	12.860403	0.228893
M^p = 0.2	0.832975	-1.054348	8.361967	6.336621	0.237512
M^p = 0.3	0.832434	-1.045750	5.310084	4.113521	0.249890
M^p = 0.4	0.831456	-1.031834	3.692485	2.962043	0.268777
M^p = 0.5	0.829711	-1.010626	2.642970	2.232016	0.300862
M^p = 0.6	0.826900	-0.983530	1.880908	1.700473	0.366278
M^p = 0.7	0.821000	-0.940880	1.288024	1.229988	0.571540
M^p = 0.8	0.814000	-0.912565	0.849415	-0.550000	6.170000
M^p = 0.9	0.814800	-0.922550	0.498916	-0.787000	0.786000

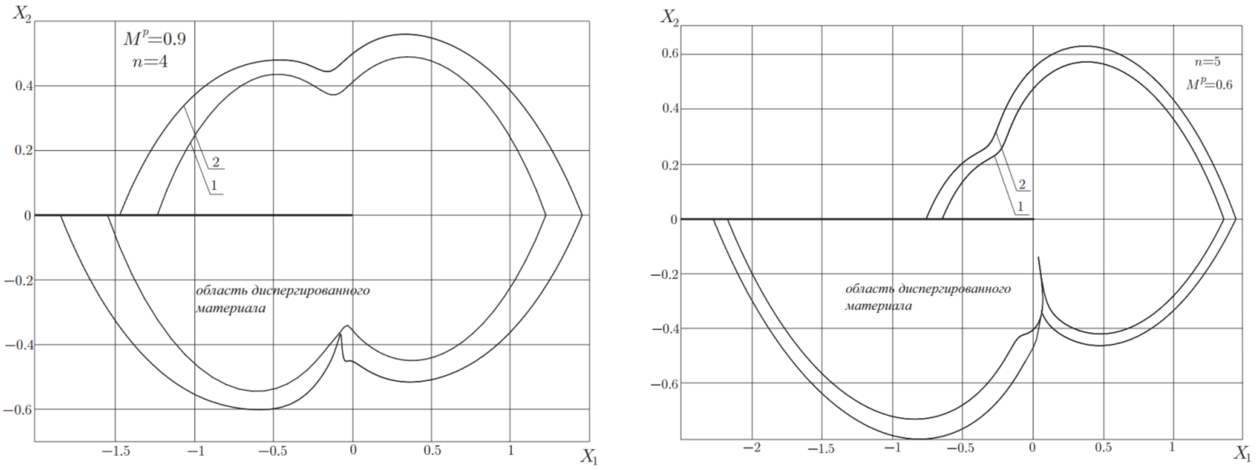

Рис. 4. Геометрия области диспергированного материала в окрестности вершины трещины для разных значений параметра смешанности нагружения.

4. Выводы и обсуждение результатов

В работе предложен метод численного определения собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующих из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения. С помощью предложенного подхода для целого ряда значений параметра смешанности нагружения определены новые собственные значения. В ходе работы были получены асимптотические решения класса задач определения НДС и поля сплошности в окрестности вершины трещины в пластине, находящейся в условиях смешанного деформирования. В настоящей работе определены области диспергированного материала, которые формируются в окрестности вершины трещины, и как результат, найден закон скейлинга, который позволяет описать разрастание области дефрагментированного материала.

Литература

[1] Hutchinson, J.W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material / J.W. Hutchinson // J. Mesh. Phys. Solids, 1968. – V. 16. – № 1. – P. 13-31.

[2] Kumar, S. A homogenized multigrid XFEEM to predict the crack growth behavior of ductile material in the presence of microstructural defects / S. Kumar, I.V. Singh, B.K. Mishra, K. Sharma, I.A. Khan // Engineering Fracture Mechanics. – 2016. In press.

[3] Meng, Q. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review / Q. Meng, Z. Wang // Engineering Fracture Mechanics. – 2016. In press.

[4] Murakami,S. Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture / S. Murakami – Dordrecht: Springer, 2012. – 423 p.

[5] Richard, H.A. Schramm, B. Schrimeisen, N.H. Cracks on Mixed Mode loading – Theories,experiments, simulations / H.A. Richard, B. Schramm, N.H. Schrimeisen // International Journal of Fatigue, 2014. – № 62. – P. 93 – 103.

[6] Shih, C.F. Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems // Ph. D. Thesis, Harvard University, Cambridge, M.A. 1973.

[7] Shih, C.F. Small scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems. Fracture Analysis ASTM STP 560, 1974. – P. 187-210.

[8] Stepanova, L. Asymptotic self-similar solution of the creep crack problems in damaged materials under mixed mode loading / L. Stepanova, E. Yakovleva, E. Mironova // Applied Mechanics and Materials, 2015. – V. 784. – P. 145-152.

[9] Stepanova, L.V. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: Asymptotic approach and numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems / L.V. Stepanova, E.M. Yakovleva // AIP Conference Proceedings, 2016. – V. 1785. – 030030. DOI: 10.1063/1.4967051.

[10] Stepanova, L.V. Asymptotic stress field in the vicinity of the mixed-mode crack in damaged materials under creep conditions / L.V. Stepanova., E. M. Yakovleva // Procedia Structural Integrity, 2016. – V. 2. – P. 793-800.

[11] Torabi, A.R. Abedinasab, S.M. Brittle fracture in key-hole notches under mixed mode loading: Experimental study and theoretical predictions / A.R. Torabi, S.M. Abedinasab // Engineering Fracture Mechanics, 2015. – № 134. – P. 35 – 53.

[12] Петухов, Д.С. Двойственные задачи плоских ползущих течений степенной несжимаемой среды / Д.С. Петухов, И.Э. Келлер // ВестникСамГТУ. Серия: Физико-математические науки [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1508

[13] Пестриков, В.М. Механика разрушения. Курс лекций / В.М. Пестриков, Е.М. Морозов. – СПб.: Профессия, 2012. – 552 с.

[14] Степанова, Л.В. Математические методы механики разрушения / Л.В. Степанова // М.: Физмалит, 2009. – 336 с.