

# Синхронизация системы связанных осцилляторов Ван дер Поля с гистерезисными звеньями: аналитический подход в рамках метода малого параметра

М.Е. Семенов<sup>1,2,3</sup>, П.А. Мелешенко<sup>3,4</sup>, О.О. Решетова<sup>3</sup>, А.М. Соловьев<sup>5</sup>

<sup>1</sup>ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Старых Большевиков 54А, Воронеж, Россия, 394064

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Единая геофизическая служба Российской академии наук», Ленина 189, Обнинск, Россия, 249035

<sup>3</sup>Воронежский государственный университет, Университетская пл. 1, Воронеж, Россия, 394018

<sup>4</sup>Целевая поисковая лаборатория прорывных технологий радиосвязи Фонда перспективных исследований, Плехановская 14, Воронеж, Россия, 394018

<sup>5</sup>АО «Концерн «Созвездие», Плехановская 14, Воронеж, Россия, 394018

**Аннотация.** В работе рассматривается система осцилляторов ван дер Поля, связанных посредством блоков гистерезисной природы. Приводятся аналитическое (полученное с использованием техники малого параметра) и численное решение системы, а также исследуются области внешней и внутренней синхронизации в зависимости от различных параметров.

## 1. Введение

Явление синхронизации автоколебаний встречается как в технических системах (преимущественно синхронизация внешним воздействием), так и в биологических (синхронизация отдельных взаимодействующих нейронов, связана с сегментацией изображений) и экономических системах (прогнозы динамики макроэкономических процессов строятся на основе многопараметрической синхронизации квазигармонических колебаний структурного, циклического и нециклического, характера) [1]. Отметим классические работы, посвященные теории синхронизации периодических автоколебаний [2], а также работы посвященные синхронизации квазипериодических колебаний [3-4].

В рамках классической теории различают вынужденную синхронизацию, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и взаимную синхронизацию, наблюдающуюся при взаимодействии двух и более автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются схожие эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот колебаний или же появлением одной из двух независимых частот.

Одной из базовых моделей, позволяющих иллюстрировать явление синхронизации в рамках теории колебаний, является система связанных осцилляторов ван дер Поля. Для которых наблюдаются такие эффекты, как синхронизация с соотношением частот 1:1, а также

различные режимы кратной синхронизации и соответствующие им квазипериодические колебания [5].

Однако к настоящему времени проблема синхронизации автоколебательных систем, содержащих звенья гистерезисной природы, практически не рассматривалась. В настоящей работе изучается указанная проблема, в условиях, когда связанные осцилляторы ван дер Поля содержат нелинейные блоки гистерезисной природы. В этой связи, отметим, что динамика систем с гистерезисом активно изучается в последние годы [6-8].

## 2. Система связанных осцилляторов ван дер Поля с периодическим внешним воздействием

Явление синхронизации автоколебательных систем внешней периодической силой, т.е. вынужденная синхронизация впервые была описана ван дер Полем и Е. Эпплтоном. Следуя рассуждениям, изложенным в [3], опишем автоколебательную систему двух связанных осцилляторов ван дер Поля, на один из которых действует гармоническая сила с частотой  $\omega_v$ , близкой к частоте свободных автоколебаний.

$$\begin{cases} \ddot{x} - \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B \omega_1^2 \cos(\omega_v t) \\ \ddot{y} - \mu(1 - \lambda y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y = \nu x. \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mu$  и  $\lambda = 1/\mu$  – управляющие параметры,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – частота собственных колебаний осцилляторов,  $\omega_v$  – частота внешнего сигнала,  $B$  – его амплитуда,  $\nu$  – параметр связи между осцилляторами.

Исследуем взаимную синхронизацию осциллятора  $x$  и  $y$ . Отметим, что в системе (1) осциллятор  $x$  будет являться ведущим, а  $y$  ведомым. Решение уравнений будем искать в виде:  $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ,  $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ , где  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ , а  $A_{1,2}, \varphi_{1,2}$  – медленно меняющиеся функции времени.

Для удобства применения метода малого параметра, перепишем систему (1):

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 x = \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + B \omega_1^2 \cos(\omega_v t) \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y = \mu(1 - \lambda y^2)\dot{y} + \nu x. \end{cases}$$

Учитывая порядок малости, вычислим  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  и  $\dot{y}$ ,  $\ddot{y}$ , так как равенства будут одинаковы с точностью до коэффициентов, приведем только два соотношения:

$$\dot{x} = \dot{A}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - \dot{\varphi}_1 A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (2)$$

$$\ddot{x} = -2\dot{A}_1 \omega \sin(\omega t + \varphi_1) - \dot{\varphi}_1 A_1 (\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_1) \cos(\omega t + \varphi_1)$$

Подставляя выражения (2) в первое уравнение системы (1) получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= -2\dot{A}_1 \omega \sin(\omega t + \varphi_1) - \cos(\omega t + \varphi_1) \left( \dot{A}_1 (\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_1) + \omega_1^2 A_1 \right) \\ \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + B \omega_1^2 \cos(\omega_v t) &= B \omega_1^2 \cos(\omega_v t) - \sin(\omega t + \varphi_1) \left( \mu \omega A_1 - \frac{A_1^3 \omega}{4} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Проведя аналогичные преобразования для осциллятора  $y$ , перепишем систему (1) в виде:

$$\begin{cases} -2\dot{A}_1 \omega \sin(\omega t + \varphi_1) - \cos(\omega t + \varphi_1) \left( \dot{A}_1 (\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_1) + \omega_1^2 A_1 \right) = \\ \quad = B \omega_1^2 \cos(\omega_v t) - \sin(\omega t + \varphi_1) \left( \mu \omega A_1 - \frac{A_1^3 \omega}{4} \right) \\ -2\dot{A}_2 \omega \sin(\omega t + \varphi_2) - \cos(\omega t + \varphi_2) \left( \dot{A}_2 (\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2 \right) = \\ \quad = \nu A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - \sin(\omega t + \varphi_2) \left( \mu \omega A_2 - \frac{A_2^3 \omega}{4} \right) \end{cases} \quad (4)$$

Соотношения для амплитуды и фазы первого осциллятора были получены ранее [5], а именно:

$$\dot{A} = -\frac{\omega_1 B}{2} \sin \varphi_1 + A_1 \left( \frac{\mu}{2} - \frac{A_1^2}{8} \right), \dot{\varphi} = \Delta - \frac{\omega_1 B}{2 A_1} \cos \varphi_1. \quad (5)$$

Соотношения для амплитуды и фазы осциллятора  $y$ , получим из второго уравнения системы (4), приравняв коэффициенты при  $\sin(\omega t)$  и  $\cos(\omega t)$  составим систему:

$$\begin{cases} -2\dot{A}_2 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 (A_2 (\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) = \nu A_1 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \left( \mu \omega A_2 - \frac{A_2^3 \omega}{4} \right) \\ -2\dot{A}_2 \omega \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 (A_2 (\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) = \nu A_1 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 \left( \mu \omega A_2 - \frac{A_2^3 \omega}{4} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Тогда, при условии что  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$  получим:

$$\dot{A}_2 = A_2 \left( \frac{\mu}{2} - \frac{A_2^2}{8} \right) - \frac{\nu A_1}{2\omega} \sin \Phi, \dot{\varphi}_2 = -\frac{\Delta}{2} + \frac{\nu A_1}{2\omega A_2} \cos \Phi \quad (7)$$

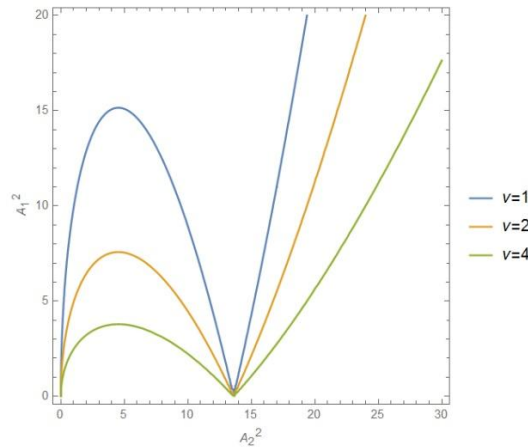
В синхронном режиме, приравняв (7) к нулю, получим уравнение зависимости между амплитудами решений осциллятора  $x$  и  $y$ :

$$\left( \frac{A_2 \omega \mu}{\nu A_1} \left( 1 - \frac{A_2^2}{4\mu} \right) \right)^2 + \left( \frac{\Delta A_2 \omega}{\nu A_1} \right)^2 = 1. \quad (8)$$

Приведем уравнение (8) к виду:

$$A_2^6 \omega^2 \mu^2 - 8 A_2^4 \omega^2 \mu^3 + A_2^2 (16 \omega^2 \mu^4 - \Delta^2 \omega^2) = 16 \mu^2 \nu^2 A_1^2 \quad (9)$$

и построим график зависимости  $A_1^2$  от  $A_2^2$  при различных значениях  $\nu$ .



**Рисунок 1.** зависимости  $A_1^2$  от  $A_2^2$  при различных значениях  $\nu$ .

Перейдем к рассмотрению системы (10), описывающей осциллятор ван дер Поля, в условиях периодического внешнего воздействия, а также наличия гистерезисного блока, формализованного посредством модели Боука-Вена. Начальные и граничные условия определены аналогично с системой (1).

$$\begin{cases} \ddot{x} - \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B \omega_1^2 \cos(\omega_\nu t) + b \Phi_{BW}(x, t) \\ \ddot{y} - \mu(1 - \lambda y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y = \nu x \end{cases} \quad (10)$$

где:

$$\Phi_{BW}(x, t) = \alpha x(t) + (1 - \alpha) D z(t)$$

$$\dot{z}(t) = A\dot{x}(t) - \beta \left| \dot{x}(t) \right| \left| z(t) \right|^{n-1} z(t) - \gamma \dot{x}(t) \left| z(t) \right|^n.$$

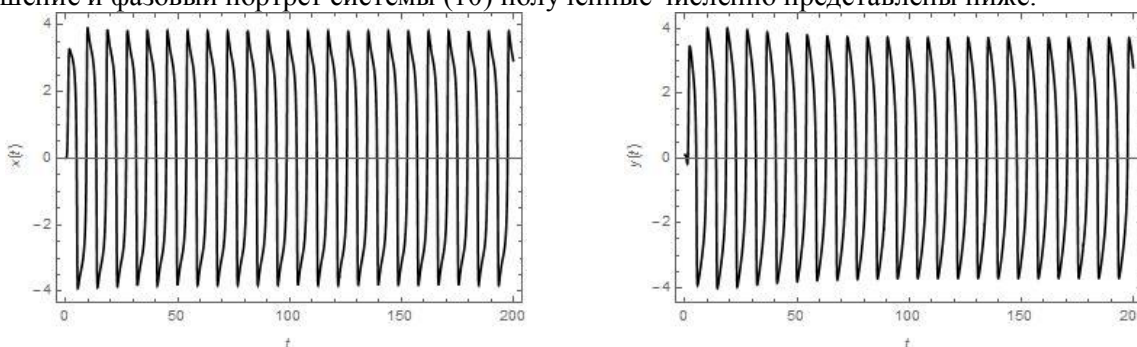
Представив правую часть первого уравнения системы (10) в виде:

$$F(t) = B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) + b\Phi_{BW}(x, t)$$

и считая, что гистерезисный оператор Боука-Вена применен исключительно к нулевому решению  $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ , записав первую гармонику разложение в ряд Фурье выхода оператора Боука-Вена при помощи метода гармонического баланса [9] можно получить уравнения, для определения амплитуды и фазы колебаний:

$$\dot{A}_1 = -\frac{\omega_1^2 B + b_1}{2\omega_1} \sin \varphi_1 + A_1 \left( \frac{\mu}{2} - \frac{A_1^2}{8} \right), \dot{\varphi}_1 = \Delta - \frac{\omega_1^2 B + a_1}{2\omega_1 A_1} \cos \varphi_1 \quad (11)$$

Решение и фазовый портрет системы (10) полученные численно представлены ниже:



**Рисунок 2.** Динамика осцилляторов  $x$  и  $y$  системы (10) при значении параметров

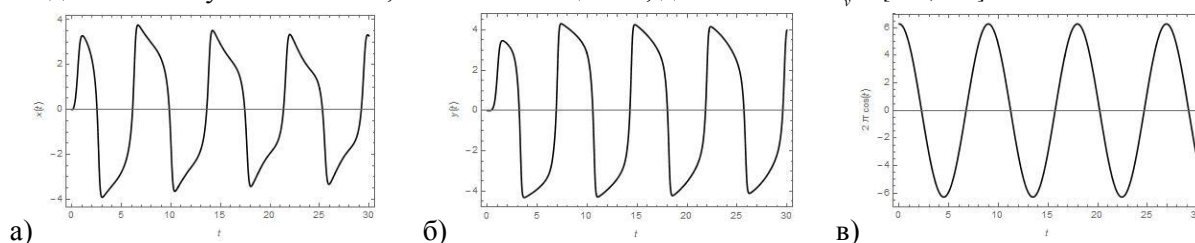
$$\mu = 3.4, \omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi, B = 2, \omega = 0.7, b = 1.7, \nu = 2.$$

### 3. Синхронизация в система связанных осцилляторов ван дер Поля

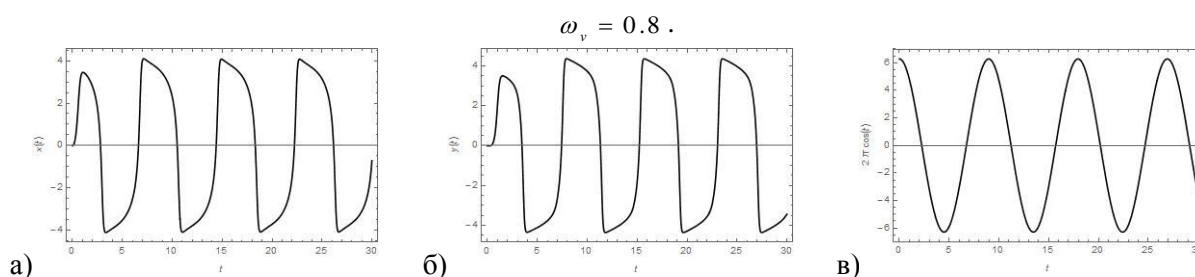
Для динамики поведения системы (1) и (10) характерно следующее явление: в определенном интервале частоты внешней силы колебания системы синхронизируются с внешним воздействием по частоте, причем упомянутый частотный интервал (полоса синхронизации) тем шире, чем больше интенсивность воздействия. Этот эффект – синхронизация внешней силой наблюдается в системах самой разной природы – в радиотехнических и электронных устройствах, в лазерах, в механических системах, в колебательных химических реакциях, в биологических объектах. Также, в системах (1) и (10) наблюдается явление внутренней синхронизации между осцилляторами  $x$  и  $y$ . Ниже проведем численное исследование параметров систем (1) и (10) при которых наблюдаются явление синхронизации, а также проанализируем влияние гистерезисного блока на полученные результаты.

На графиках (3-4) при указанных значениях параметров системы (1) и (10) наблюдается как взаимная синхронизация осцилляторов  $x$  и  $y$ , так и вынужденная синхронизация осцилляторов по частоте с внешним воздействием. В системе (1) взаимная синхронизация происходит при значении параметра  $\omega_v \in [0.7, 1.7]$ , а вынужденная синхронизация при  $\omega_v \in [0.7, 1.3]$ . Для системы (10) параметры, отвечающие области взаимной синхронизации осцилляторов, принадлежат интервалу  $\omega_v \in [0.8, 1.8]$ , а в случаи вынужденной синхронизации  $\omega_v \in [0.8, 1.1]$ . Отметим, что существенное влияние на полосу синхронизации осцилляторов оказывает параметр линейной связи  $\nu$ , а именно, с увеличением значения параметра полоса синхронизации становится значительно уже, при  $\nu = 3.6$  взаимная синхронизация осцилляторов в системе (1) происходит при  $\omega_v \in [0.7, 1.4]$ , а вынужденная синхронизация при  $\omega_v \in [0.7, 0.9]$ . А для системы (10)  $\omega_v \in [0.8, 1.3]$  и  $\omega_v \in [0.8, 1]$  соответственно. Параметр перед

гистерезисным звеном напротив, оказывает регуляризирующее воздействие. Так при увеличении параметра от  $b = 1.7$  до  $b = 3$  в системе (10), полоса внутренней синхронизации увеличивается до  $\omega_v \in [0.4, 1.8]$ , однако интервал синхронизации с частотой внешнего воздействия не увеличивается, а только смещается, до значений  $\omega_v \in [0.6, 0.8]$ .

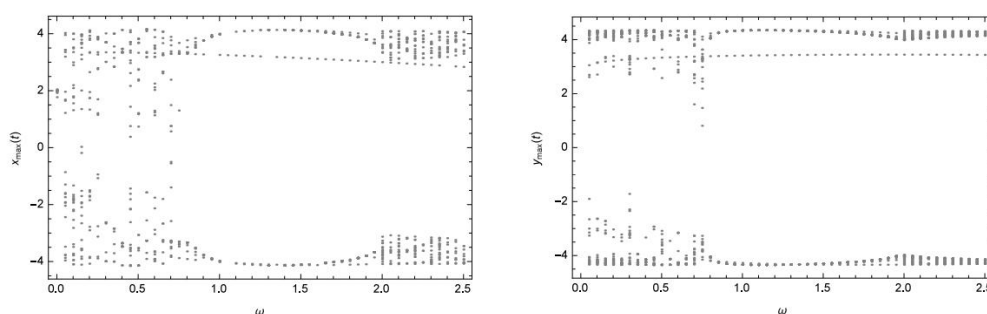


**Рисунок 3.** а) Поведение осциллятора  $x$  в системе (1) б) Поведение осциллятора  $y$  в системе (1) в) Возмущающая сила при значении параметров  $\mu = 3.4$ ,  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$ ,  $\nu = 2.6$ ,  $B = 2$



**Рисунок 4.** а) Поведение осциллятора  $x$  в системе (10) б) Поведение осциллятора  $y$  в системе (10) в) Возмущающая сила при значении параметров  $\mu = 3.4$ ,  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$ ,  $\nu = 2.6$ ,  $B = 2$ ,  $b = 1.7$ ,  $\omega_v = 0.8$ .

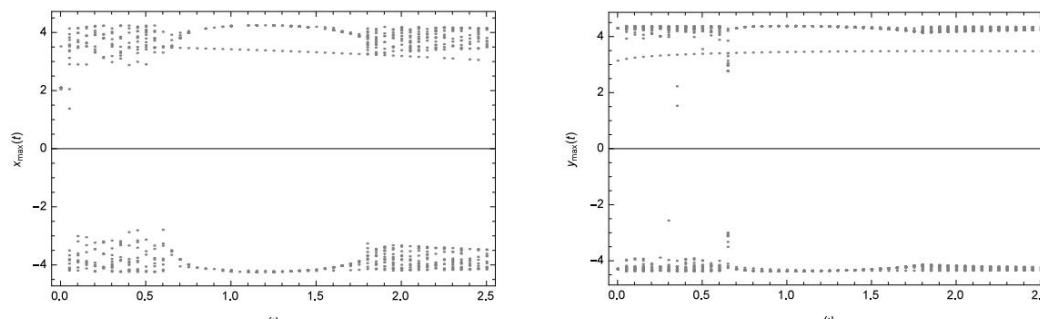
Приведем бифуркационные диаграммы поведения осцилляторов  $x$  и  $y$  в системах (1) и (10) в зависимости от параметра  $\omega_v$ .



**Рисунок 5.** Бифуркационные диаграммы в зависимости частоты внешнего воздействия для системы (1) для осциллятора  $x$  (слева) и для осциллятора  $y$  (справа) при значении параметров  $\mu = 3.4$ ,  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$ ,  $\nu = 2.6$ ,  $B = 2$ .

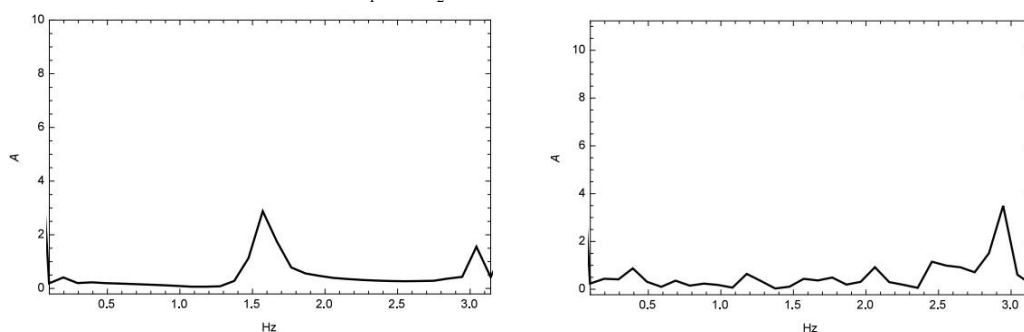
Объяснить результаты описанные выше можно следующим способом. Так как в системе (10), правая часть первого уравнения является суммой гармонического внешнего воздействия и гистерезисного звена, то вход гистерезисного блока подается сигнал, который также представляет собой сумму, состоящую из собственных колебаний системы и отклика системы на внешнее периодическое воздействие. Синхронизация с внешним воздействием представляется затруднительной, в силу того, что система (10) обладает собственными сильными колебаниями, имеющими определенный период, но “неправильную” форму. В том случае, когда спектральные характеристики собственных колебаний имеют ярко выраженную

доминирующую частоту, происходит синхронизация (выход гистерезисного преобразователя имеет близкую частоту). Ниже приводится спектр выхода гистерезисного преобразователя в зависимости от различных значений параметров  $\omega_v$ .



**Рисунок 6.** Бифуркационные диаграммы в зависимости частоты внешнего воздействия для системы (10) для осциллятора  $x$  (слева) и для осциллятора  $y$  (справа) при значении параметров

$$\mu = 3.4, \omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi, \nu = 2.6, B = 2, b = 1.7.$$



**Рисунок 7.** Спектральная характеристика выхода гистерезисного преобразователя в уравнении (10) при значениях параметра принадлежащих интервалу синхронизации осцилляторов  $x$  и  $y$

$\omega_v = 0.8$  (слева) и при значениях параметра не принадлежащих интервалу синхронизации

$\omega_v = 1.9$  (справа).

#### 4. Заключение

В работе были рассмотрены системы связанных осцилляторов ван дер Поля в условиях наличия и отсутствия гистерезисного блока. Было приведено аналитическое решение систем посредством использования метода малого параметра, а также построены зависимости между амплитудами колебаний осцилляторов систем.

Также было проведено численное исследование синхронизации систем. Удалось установить, что наличие гистерезисного блока, формализованного при помощи модели Боука-Вена существенным образом влияет как на внешнюю, так и на внутреннюю синхронизацию, а именно, в случае наличия гистерезисного блока, интервал внутренней синхронизации заметно увеличивается, при этом синхронизация с внешним воздействием становится затруднительна.

#### 5. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 19-08-00158). Работа М.Е. Семенова и П.А. Мелешенко в части «Динамика системы ван дер Поля» поддержана РФ (грант 19-11-0197).

#### 6. Литература

- [1] Логинов, Е.Л. Циклогерентный подход к нахождению точек антикризисного равновесия экономических систем в условиях глобального кризиса мировой экономики / Е.Л. Логинов, В.Е. Логинова // Финансы и кредит. – 2016. – Т. 17, № 689. – С. 2-12.

- [2] Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин – Москва: Наука, 1981. – 914 с.
- [3] Ланда, П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы – М.: Наука, 1980.
- [4] Кузнецов, С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. – 2011. – Т. 181, № 2. – С. 121-149.
- [5] Semenov, M.E. The van der Pol oscillator under hysteretic control: regular and chaotic dynamics / M.E. Semenov, O.O. Reshetova, A.M. Solovyov, P.A. Meleshenko, V.A. Sobolev, A.N. Bogaychuk // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1368. – P. 042030.
- [6] Семенов, М.Е. Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского / М.Е. Семенов, М.Г. Матвеев, П.А. Мелешенко, А.М. Соловьев // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – № 20. – С. 106-113.
- [7] Semenov, M.E. Coupled Inverted Pendulums : Stabilization Problem / M.E. Semenov, A.M. Solovyov, M.A. Popov, P.A. Meleshenko // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). – 2018. – Vol. 88(4). – P. 517-524.
- [8] Рязских, В.И. Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве / В.И. Рязских, М.Е. Семенов, А.Г. Рукавицын, О.И. Канищева, А.А. Демчук, П.А. Мелешенко // Вестник ЮУГУ. Серия: Математика, Физика, Механика. – 2017. – Т. 9, № 3. – С. 27-33.
- [9] Воронов, А.А. Теория автоматического управления: учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохин – М.: Высш. шк., 1986. – 504 с.

## **Synchronization in the system of coupled van der Pol oscillators under hysteretic bonds: an analytic approach within the small parameter method**

**M.E. Semenov<sup>1,2,3</sup>, P.A. Meleshenko<sup>3,4</sup>, O.O. Reshetova<sup>3</sup>, A.M. Solovyov<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Starykh Bol'shevikov str. 54A, Voronezh, Russia, 394064

<sup>2</sup>Geophysical Survey of Russia Academy of Sciences, Lenin Ave. 189, Obninsk, Russia, 249035

<sup>3</sup>Voronezh State University, University Square. 1, Voronezh, Russia, 394018

<sup>4</sup>Target Search Lab of Groundbreaking Radio Communication Technologies of Advanced Research Foundation, Plekhanovskaya str. 14, Voronezh, Russia, 394018

<sup>5</sup>JSC "Concern "Sozvezdie", Plekhanovskaya str. 14, Voronezh, Russia, 394018

**Abstract.** The paper deals with a system of coupled van der Pol oscillators with hysteresis nonlinearity in the link. An analytical (obtained within the small parameter approach) and numerical solutions for the considered system are presented and discussed. Domains of the external and internal synchronization depending on various parameters are also investigated.