Сходимость алгоритмов адаптации сеток для эллиптических сингулярно возмущенных краевых задач с экспоненциальным погранслоем

И.А. Блатов[1], Е.В. Китаева[2]

[1]Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Льва Толстого 23, Самара, Россия, 443010

[2]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Рассматривается метод конечных элементов Галеркина для самосопряженных эллиптических сингулярно возмущенных краевых задач на сетках Бахвалова и Шишкина. Изучается метод апостериорной адаптации расчетной сетки в случае неизвестной границы пограничного слоя. Анонсирована теорема сходимости расчетных сеток к предельным разбиениям и условно ε-равномерные оценки погрешности приближенных решений на предельных разбиениях. Приводятся результаты численных экспериментов.

1. Введение

При применении проекционно-сеточных методов (ПСМ) к решению задач с особенностями (в частности, сингулярно возмущенных краевых задач (СВКЗ)) широко применяется метод адаптивных подвижных сеток [1]. Однако, несмотря на обширную литературу (см., например, [2] и библиографию там же), вопросы теоретического обоснования сходимости подвижных сеток к предельному разбиению существенно менее изучены. Несмотря на наличие большого числа работ по апостериорным оценкам погрешности и связанными с ними алгоритмами адаптации, в [3] отмечается, что "единственным строгим опубликованным результатом такого типа является адаптивный алгоритм сетки в [4]", а соответствующая проблема относится к нерешенным. Заметим, что в [4] рассматривается разностная схема для СВКЗ весьма специального вида и на окончательном разбиении получены оценки погрешности первого порядка, а число шагов алгоритма адаптации зависит от малого параметра. Для разностных методов близкие вопросы изучались также в [5]-[6], см. также библиографию в [7]. В [7]-[10] было показано, что в основу доказательства сходимости алгоритмов адаптации для задач с на сетках Бахвалова и Шишкина может быть положен метод галеркинских проекций. В настоящей статье этот метод применяется к самосопряженным эллиптическим СВКЗ, в случае использования сеток Бахвалова и Шишкина. Анонсирована теорема сходимости расчетных сеток к предельному разбиению за число шагов, не зависящиее от малого параметра, и получены условно ε-равномерные оценки погрешности второго порядка в C-норме. Приводятся результаты численных экспериментов.

2. Постановки задач и ПСМ

Рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon^2 \Delta u + p(x,y)u = f(x,y), (x,y) \in \Omega, u|_\Gamma = 0. \quad (1)$$

Здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, Ω - ограниченная односвязная область в $R^2, \Gamma = \partial\Omega$ - достаточно гладкая замкнутая кривая.

Предполагается, что $p(x,y)$ - достаточно гладкая по совокупности аргументов функция, причем $p(x,y) > 0$ при $(x,y) \in \Omega$. Пусть $\min\limits_{(x,y)\in\Gamma} p(x,y) = p_0^2 > 0$. Через $C_0(\Omega)$ обозначим множество функций $u \in C(\Omega) : u|_\Gamma = 0$.

Пусть $z = (x,y)$, $\rho(z,\Gamma)$ - расстояние от z до Γ, θ - координата вдоль кривой Γ, т.е. длина дуги Γ, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки Γ.

Из результатов [11] вытекает, что при сделанных предположениях задача (1) имеет при малых $\varepsilon > 0$ единственное решение u_ε, причем справедливы оценки

$$|\frac{\partial^i u_\varepsilon}{\partial n^i}(z)| \leq C(1+\varepsilon^{-i}\exp(-p_0/\varepsilon\rho(z,\Gamma))), |\frac{\partial^i u_\varepsilon}{\partial \theta^i}(z)| \leq C, \rho(z,\Gamma) \leq \frac{2}{p_0}\varepsilon|\ln\varepsilon|, 0 \leq i \leq 2, \quad (2)$$

$$|\frac{d^\alpha v_\varepsilon}{dz^\alpha}(z)| \leq C, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \rho(z,\Gamma) > \frac{2}{p_0}\varepsilon|\ln\varepsilon|, 0 \leq |\alpha| \leq 2, \quad (3)$$

где n - направление нормали к Γ, проходящей через точку z.

Перейдем к описанию ПСМ. Вначале рассмотрим две вспомогательные сетки на отрезках, определяющих ширину погранслоя. Зафиксируем натуральное n.

Первую сетку выберем по известной методике Бахвалова [12]. Пусть $a_\varepsilon = (2\varepsilon/p_0)|ln\varepsilon|, b_\varepsilon = a_\varepsilon + 2(1-\varepsilon)/p_0$. Определим функцию $\chi(y)$ формулой

$$\chi(y) = -\frac{2\varepsilon}{p_0}\ln\{(p_0/2)[y - a_\varepsilon + (2/p_0)\varepsilon]\},\ y \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon].$$

Очевидно, что $\chi(y) \in C^1[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ и взаимно однозначно переводит $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ в $[0, a_\varepsilon]$. Искомое разбиение отрезка $[0, a_\varepsilon]$ определим в виде $G = \chi(G_\tau)$, где G_τ - вспомогательное разбиение отрезка $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$. Определим его. Пусть $a_\varepsilon = \tau_n$. Положим $\tau_{i-1} = \tau_i + (b_\varepsilon - a_\varepsilon)/n, i = n-1, n-2, \cdots, 0$.

Узлы искомого разбиения имеют вид

$$t_i = \chi(\tau_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n. \quad (4)$$

В качестве второй сетки G_s выберем кусочно-равномерную сетку Шишкина [5]. Пусть $\tilde{a}_\varepsilon = (2\varepsilon/p_0)\ln n$,

$$t_i = \tilde{a}_\varepsilon\frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \cdots, n. \quad (5)$$

Поскольку мы рассматриваем только часть сетки Шишкина на отрезке, определяющем ширину погранслоя, то сетка (5) – это равномерное с шагом $\tilde{a}_\varepsilon/n$ разбиение отрезка $[0, \tilde{a}_\varepsilon]$.

Далее определения пространств пробных и тестовых функций и постановки задач для обоих разбиений делаются одинаково и отличаются только определением узлов t_i по формулам (4) или (5) соответственно.

Определим разбиение области Ω на конечные элементы. Пусть $\Omega_\pi = \{z \in \Omega : \rho(z,\Gamma) \leq a\}$, где $a = a_\varepsilon$ и $a = \tilde{a}_\varepsilon$ в случае сеток Бахвалова и Шишкина соответственно. $\Omega_\Delta = \Omega \setminus \Omega_\pi$. Область Ω_Δ будем называть центральной зоной, а Ω_π - зоной пограничного слоя. Предположим, что параметр ε столь мал, что отрезки внутренней нормали к Γ не пересекаются в Ω_π. Из каждой точки линии Γ проведем луч в направлении внутренней нормали к Γ. На каждом из лучей отложим отрезок длины $2/p_0\varepsilon|\ln\varepsilon| = a_\varepsilon$ в случае сетки Бахвалова, $2/p_0\varepsilon\ln n = \tilde{a}_\varepsilon$ – в случае сетки Шишкина, и разобьем его узлами t_i соответственно (4) или (5) на n частей. Линии, являющиеся геометрическим местом узлов, равноудаленных от Γ обозначим через γ_k $(k = 0, 1, \cdots, n)$.

Разобьем контур Γ на дуги длины порядка $O^*(1/n)$ и из точек деления проведем лучи l_j в направлении внутренней нормали к Γ. В результате область Ω_π разобьется линиями γ_k и l_j на конечные элементы ω_i, каждый из которых является криволинейным четырехугольником.

Оставшуюся часть Ω - область Ω_Δ каким-нибудь образом разобьем на конечные элементы ω_i, являющиеся треугольниками, сторонами которых будут отрезки прямых, либо дуги кривой γ_n. Будем предполагать, что разбиение Ω_Δ квазиравномерно с параметром $h = 1/n$, т.е. $mes\omega_i = O^*(h^2), diam\omega_i = O^*(h)$.

Построенное разбиение обозначим Δ_{n,p_0} будем называть разбиением Бахвалова или Шишкина, в зависимости от того какая из двух вспомогательных сеток использовалась для его построения.

Перейдем к определению пробных галеркинских пространств. Функции пробного пространства $E = E(\varepsilon, h)$ определим, как функции из $C_0(\Omega)$, линейные на каждом из отрезков нормали к Γ, заключеном между линиями γ_k и γ_{k+1}, и линейные на каждом из участков линии γ_k, заключенном между лучами l_j и l_{j+1}, относительно переменной $\kappa = \psi_{kj}(z)$, где ψ_{kj} - отображение, переводящее каждую точку данного отрезка в ее проекцию вдоль нормали, выходящей из этой точки, на хорду χ_j, являющуюся звеном ломаной, вписанной в Γ.

На элементах $\omega_i \subset \Omega_\Delta$, а также на лучах l_j, она также вычисляется с помощью линейной интерполяции. На отрезках линий γ_k, заключенных между l_j и l_{j+1}, вычисление линейной функции, заданной на χ_j, и проектированию вдоль нормали точки хорды χ_j на линию γ_k.

Таким образом, если функция $v \in E$ задана в узлах разбиения, то вычисление ее в любой точке $z \in \Omega$ сводится к вычислению значений трех линейных функций.

Тем самым пространство E определено. Метод Галеркина для задачи (1) состоит в отыскании такой функции $u_n \in E$, что для любой $w \in E$

$$\varepsilon^2(\nabla u_n, \nabla w) + (p(x,y), w) = (f(x,y), w), \tag{6}$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2(\Omega)$.

Теорема 1. Найдутся такие числа $\varepsilon_0 > 0, h_0 > 0, \gamma_0 > 0, C > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], h \in (0, h_0] : \varepsilon \le \gamma_0 h$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], h \in (0, h_0] : \varepsilon \le \gamma_0 h$, существует единственное решение $u_m(x)$ задачи (6), для которых в случае разбиения Шишкина справедливы оценки

$$\| u_m - u_\varepsilon \|_{C(\Omega)} \le Ch^2 \ln h, \tag{7}$$

а в случае разбиения Бахвалова – оценки

$$\| u_m - u_\varepsilon \|_{C(\Omega)} \le Ch^2. \tag{8}$$

Доказательство этой и следующей теорем проводится методом галеркинских проекций [8]-[10].

3. Алгоритм адаптации сеток

Рассмотрим теперь алгоритм адаптации расчетной сетки в случае неизвестной границы пограничного слоя. Введем обозначения $f(x,y)|_{(x,y)\in\Gamma} = \tilde{f}(0,\theta)$, $p(x,y)|_{(x,y)\in\Gamma} = \tilde{p}(0,\theta)$, где ρ, θ - локальные координаты из (2). Тогда главный член погранслойной составляющей асимптотического разложения [11] имеет вид $-\tilde{f}(0,\theta)e^{-\sqrt{\tilde{p}(0,\theta)}\frac{\rho}{\varepsilon}}$.

Предположение 1. *Для алгоритмов адаптации предположим, что при* $(x,y) \in \Gamma$ $f(x,y) = \tilde{f}(0,\theta) \not\equiv 0$.

Определение 1. *Будем говорить, что* $\phi = \phi(\varepsilon, n)$ *есть* n*-граница пограничного слоя, если справедлива оценка* $\max\limits_{\rho\in[0,\phi]} e^{-p_0\frac{\rho}{\varepsilon}} \leq \frac{1}{n^2}$.

Определение 2. *Число* $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\varepsilon, n) = \sup\limits_{\phi} \phi(\varepsilon, n)$ *будем называть точной* n*-границей пограничного слоя.*

Очевидно, что

$$\tilde{\phi} = \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln n. \tag{9}$$

Будем предполагать, что нам известно расположение пограничного слоя (окрестность границы Γ), но неизвестна его точная n- граница (или же параметр p_0). Приведем алгоритм приближенного отыскания этой n- границы.

Шаг 1. Задаем некоторое достаточно большое $p^0 \geq p_0$. Полагаем $k = 0$.

Шаг 2. Определяем разбиение Δ_{n,p^k} как разбиение Бахвалова или Шишкина, в построении которого параметр p_0 заменяем на p^k.

Шаг 3. Находим решение $u_{n,p^k}(x,y)$ на разбиении Δ_{n,p^k}.

Шаг 4. Полагаем $p^{k+1} = p^k - \tau_k$, где τ_k выбирается так, чтобы $t_{n-1,k+1} - t_{n-1,k} = \varepsilon \ln\ln n$ в случае разбиения Бахвалова и $t_{n,k+1} - t_{n,k} = \varepsilon \ln\ln n$ в случае разбиения Шишкина (см. (4) или (5)).

Шаг 5. Находим решение $u_{n,p^{k+1}}(x,y)$ на разбиении $\Delta_{n,p^{k+1}}$.

Шаг 6. Вычисляем $\mu_k = \parallel u_{n,p^{k+1}}(x,y) - u_{n,p^k}(x,y) \parallel_{C(\Omega_k)}$, где $\Omega_k = \{(x,y) = (\rho,\theta) \in \Omega : t_{n,k} \leq \rho \leq t_{n,k+1}$, $t_{n,k}$ узлы сетки Шишкина в случае разбиения Шишкина, $\Omega_k = \{z = (x,y) = (\rho,\theta) \in \Omega : t_{n-1,k} \leq \rho \leq t_{n-1,k+1}$, $t_{n,k}$ узлы сетки Бахвалова в случае разбиения Бахвалова.

Шаг 7. Если $k = 0$, то $k := k+1$ и переход к шагу 2, иначе к шагу 8.

Шаг 8. Если $\mu_k > \frac{\ln n}{n^2}$ в случае разбиения Бахвалова и $\mu_k > \frac{\ln^3 n}{n^2}$ в случае разбиения Шишкина, то $k := k+1$ и переход к шагу 2, иначе $\tilde{\phi} \approx t_{n-1,k}$ в случае разбиения Бахвалова, $\tilde{\phi} \approx t_{n,k}$ в случае разбиения Шишкина, и конец алгоритма.

Теорема 2. *Найдутся такие числа* $\varepsilon_0 > 0, n_0$ *- натуральное,* $\gamma_0 > 0, C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 > 0$*, что для любых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], n \geq n_0 : \varepsilon|\ln(\varepsilon)| \leq \frac{\gamma_0}{n}$ *алгоритм 1-8 закончит свою работу при* $k < C_1\frac{\ln n}{\ln\ln n}$*, причем будут справедливы оценки*

$$|\tilde{\phi} - t_{n-1,k})| \leq C_2\varepsilon \ln\ln n, |\tilde{\phi} - t_{n,k})| \leq C_2\varepsilon \ln\ln n, \tag{10}$$

$$\parallel u_{n,p^k}(x,y) - u_\varepsilon(x,y) \parallel_{C[0,1]} \leq C_3\frac{\ln n}{n^2}, \ \parallel u_{n,p^k}(x,y) - u_\varepsilon(x,y) \parallel_{C[0,1]} \leq C_3\frac{\ln^3 n}{n^2}. \tag{11}$$

в случае разбиений Бахвалова и Шишкина соответственно.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 остаются справедливы и в случае области с кусочно-гладкой границей, если в точках излома выполнены условия согласования [13].

4. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим задачу

$$-\varepsilon^2\Delta u + u = \frac{1}{16}(2-x-y)(2+x+y)(2-x+y)(2+x-y), u|_\Gamma = 0, \tag{12}$$

где $\Gamma = \partial\Omega$, $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Для данного примера в угловых точках квадрата выполнены условия согласования первого порядка [13].

Начальное значение параметра сетки p^0, при котором начинался процесс адаптации, приняли равными 10, а шаг его изменения выбран таким, что для сетки Бахвалова $t_{n+1,k} - t_{n+1,k+1} = \varepsilon \ln\ln n$, т.е.

$$p^{k+1} = \frac{2p^k \ln(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon)}{2\ln(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon) - p^k \ln\ln n},$$

а для сетки Шишкина $t_{n,k} - t_{n,k+1} = \varepsilon \ln\ln n$, т.е.

$$p^{k+1} = \frac{2p^k \ln n}{2\ln n + p^k \ln\ln n},$$

Результаты расчетов представлены в таблице 1. Во втором и третьем столбцах представлены результаты для сетки Бахвалова, а в четвертом и пятом столбцах — для сетки Шишкина. Здесь k - номер итерации, на которой прекращается выполнение алгоритма, $\Delta t = |\tilde{\phi} - t_{n+1,k}|$ для сетки Бахвалова, $\Delta t = |\tilde{\phi} - t_{n,k}|$ для сетки Шишкина - погрешность приближенного значения точной границы пограничного слоя.

Таблица 1. Результаты расчетов.

	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
n=4	$k = 7$ $\Delta t = 0.000209$ $p^k = 1.081480$	$k = 7$ $\Delta t = 0.000021$ $p^k = 1.08148$	$k = 1$ $\Delta t = 0.002169$ $p^k = 4.585820$	$k = 7$ $\Delta t = 0.000021$ $p^k = 1.081271$
n=8	$k = 5$ $\Delta t = 0.000082$ $p^k = 1.020238$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000008$ $p^k = 1.020238$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000084$ $p^k = 1.017163$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000008$ $p^k = 1.019930$
n=16	$k = 5$ $\Delta t = 0.000108$ $p^k = 0.980853$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000011$ $p^k = 0.980853$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000105$ $p^k = 0.976100$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000011$ $p^k = 0.980374$
n=32	$k = 5$ $\Delta t = 0.000024$ $p^k = 1.003430$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000002$ $p^k = 1.003430$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000030$ $p^k = 0.995472$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000002$ $p^k = 1.002625$
n=64	$k = 5$ $\Delta t = 0.000360$ $p^k = 1.045207$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000036$ $p^k = 1.045207$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000372$ $p^k = 1.031436$	$k = 5$ $\Delta t = 0.000036$ $p^k = 1.043793$

Данные вычислительных экспериментов согласуются с теоретическими результатами. Из таблицы видно, что двигаясь с шагом $\varepsilon \ln\ln n$, точка $t_{n+1,k}$ в случае сетки Бахвалова и $t_{n,k}$ в случае сетки Шишкина достигает точной границы погранслоя $\tilde{\phi}$ с погрешностью, удовлетворяющей для всех значений оценке (10) с константой $C_2 = 1$, после чего алгоритм заканчивает работу. При этом значения параметра p^k, на которых алгоритм заканчивает работу, оказываются либо чуть больше, либо чуть меньше единицы, т.е. приближенное значение границы погранслоя оказывается либо чуть левее, либо чуть правее точной границы.

5. Заключение

В работе получены следующие результаты.

1. Предложены новые алгоритмы адаптации сетки для двух классов сингулярно возмущенных краевых задач в случае неизвестной границы пограничного слоя.

2. Анонсирована теорема об априорных оценках погрешности приближенных решений проекционно-сеточного метода.

3. Анонсирована теорема о сходимости расчетных сеток и оценках погрешности приближенных решений на предельной сетке.

4. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

6. Литература

[1] Liseikin V.D. Grid Generation Methods / V.D. Liseikin. — Berlin: Springer, 1999.— 529 p.

[2] Linss T. Lauer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems / T. Linss. — Springer, 2010.— 384 p.

[3] Roos H.G., Stynes M. Some open question in the numerical analysis of sindularly perturbed differential equations / H.G. Roos, M. Stynes // Computation Methods in Applied Mathematics. - 2015. - Vol. 5. DOI: 10.1515/cmam-2015-0011.

[4] Kopteva N, Stynes V. A robust adaptive method for a quasi-linear one-dimensional convection-diffusion problem / N. Kopteva, V, Stynes // SIAM J. Numer. Anal. - 2001. - Vol. 39. - P. 1146-1467.

[5] Шишкин Г.И. Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных краевых задач на локально переизмельчаемых сетках. Уравнения конвекции-диффузии / Г.И. Шишкин // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2000.— Т.40 — № 5.— С. 714-725.

[6] Шишкин Г.И. Сеточная аппроксимация параболического уравнения конвекции-диффузии на априорно адаптирующихся сетках; эпсилон-равномерно сходящиеся схемы / Г.И. Шишкин //Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2008.— Т.48. — № 6.— С. 1014-1033.

[7] Блатов И.А., Добробог Н.В. Условная эпсилон-равномерная сходимость алгоритмов адаптации в методе конечных элементов для сингулярно возмущенных задач / И.А. Блатов, Н.В. Добробог // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2010. — Т.50. — № 9.— С. 1550-1568.

[8] Блатов И.А. Проекционный метод для сингулярно возмущенных краевых задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1990. — Т. 30. — №7. — С. 1131-1144.

[9] Блатов И.А., Китаева Е.В. Сходимость адаптации сеток Н.С. Бахвалова для сингулярно возмущенных краевых задач / И.А. Блатов, Е.В. Китаева // Сиб. журн. вычисл. математики.— 2016. — Т. — 19. — № 1. — С. 47-59.

[10] Блатов И.А., Добробог Н.В., Китаева Е.В. Условная эпсилон-равномерная ограниченность галеркинских проекторов и сходимость метода адаптации сеток для сингулярно возмущенных краевых задач. / И.А. Блатов, Н.В. Добробог, Е.В. Китаева // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2016. — Т. 56. — № 7. — С. 1323-1334.

[11] Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика / В.А. Треногин — Успехи математических наук.— 1970.— Т. 25.— № 4.— Р. 123-156.

[12] Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии погранслоя / Н.С. Бахвалов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.— 1969. — Т.9.— № 4. — С. 841-859.

[13] Андреев В.Б. Равномерная сеточная аппроксимация негладких решений смешанной краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии в прямоугольнике / В.Б. Андреев // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2008. — Т.48. — № 1. — С. 90-114.

The convergence of adaptation alghorithms of computational grids for elliptic singularly perturbed boundary value problems with exponential boundary layer

I.A. Blatov[1], **E.V. Kitaeva**[2]

[1]Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics L. Tolstogo street, 23, Samara, Russia, 443010

[2]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The finite element Galerkin method for elliptic self-adjoint singularly perturbed boundary value problems on grids Bahvalov and Shishkin is considered. We study the method a posteriori adaptation of the computational grid in the event of an unknown border boundary layer. Announced convergence theorem computational grids to limit partitions and suspended ε is a uniform evaluation error of approximate solutions to limit partitions. The results of numerical experiments are considered.

Keywords: finite element method, adaptive grids, singularly perturbed boundary-value problems, convergence of grids.