

Решения задачи оптимального быстрогодействия для силового привода в критическом случае

О. В. Видилина

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

Аннотация

В статье рассматривается задача оптимального быстрогодействия для магнитоэлектрического силового привода.

Ключевые слова: Оптимальное быстродействие; асимптотика точек переключения; магнитоэлектрический силовой привод

1. Введение

Сингулярно возмущенным задачам оптимального управления посвящено значительное число работ. Сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений возникают при моделировании объектов управления различной природы: манипуляторы с упругими сочленениями, каталитические реакторы, гироскопические системы и другие. Задачи оптимального быстрогодействия рассматривались в работах. Для решения этой задачи использовалась порождающая задача, но нет асимптотических приближений к решению исходной возмущенной задаче. В тоже время, оптимальное управление порождающей системы не дает асимптотического приближения, поскольку не учитывает изменение быстрой переменной в окрестности начала координат. В отличие от всех известных работ, в данной статье предлагается алгоритм нахождения асимптотического разложения точек переключения оптимального управления, который основан на исследовании трансцендентных уравнений вместо дифференциальных, и в результате которого происходит декомпозиция исходной задачи на подзадачи меньшей размерности. В качестве примера рассмотрена задача оптимального быстрогодействия для магнитоэлектрического силового привода. В ней есть существенное отличие – наличие нулевого собственного значения. Что, тем не менее, позволяет успешно применить описанный в [3] метод.

2. Асимптотика точек переключения

Для задачи оптимального быстрогодействия для сингулярно возмущенной системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y + B_1u, \\ \varepsilon \dot{y} &= A_{21}x + A_{22}y + B_2u,\end{aligned}\tag{1}$$

где ε – малый положительный параметр, $x \in R^m$, $y \in R^n$, A_{ij} – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности, и B_1, B_2 — вектор-столбцы размерности m и n , координаты которых отличны от нуля, u — экстремальное скалярное управление, переводящее систему из начального положения за минимальное время в начало координат, $|u| \leq 1$, собственные значения матрицы A_{22} и $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ системы различные и отрицательные, доказана теорема о нахождении асимптотического разложения точек переключения оптимального управления u [3].

При доказательстве использовался метод декомпозиции сингулярно возмущенных систем [4]. В системе (1) с помощью преобразования: $x = v + \varepsilon Hz$, $y = z + Px$, где $P = P(\varepsilon)$, $H = H(\varepsilon)$ разделяют переменные. В результате получим следующую систему (предварительно приведя ее к диагональному виду):

$$\dot{v} = Av + Du, \quad \dot{z} = Bz + Cu,\tag{2}$$

где $A = A(\varepsilon) = A_1 + \varepsilon A_2 + \dots$ — матрица размера $(m \times m)$, $B = B(\varepsilon) = B_1 + \varepsilon B_2 + \dots$ — матрица размера $(n \times n)$, собственные значения которых совпадают с собственными значениями матрицы системы (1) и имеют вид: $\lambda_i = -\alpha_i(\varepsilon)$, $\lambda_j = -\frac{\alpha_j(\varepsilon)}{\varepsilon}$, ($i = 1, \dots, m$, $j = m + 1, \dots, m + n$), $\alpha_i, \alpha_j > 0$, $D = D(\varepsilon)$, $C = C(\varepsilon)$ – вектор-столбцы размерности m и n соответственно.

Теорема. Рассмотрим управляемую систему (2), где u – оптимальное управление, переводящее систему из начального положения $(v^0, z^0) = (v_1^0, v_2^0, \dots, v_m^0, z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ в начало координат за минимальное время t_{m+n} . Тогда для нахождения асимптотического разложения точек переключения $t_1, t_2, \dots, t_{m+n-1}$ ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m+n-1} < t_{m+n}$) оптимального управления справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\pm \frac{v_{i,0}^0}{d_{i,0}} &= \frac{2}{\alpha_{i,0}} \left(\frac{1}{2} - e^{\alpha_{i,0}t_{1,0}} + e^{\alpha_{i,0}t_{2,0}} + \dots + (-1)^{m-1} e^{\alpha_{i,0}t_{m-1,0}} + \frac{(-1)^m}{2} e^{\alpha_{i,0}t_{m,0}} \right), \\ e^{\alpha_{j,0}\xi_1} + e^{\alpha_{j,0}\xi_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2} e^{\alpha_{j,0}\xi_n} &= 1,\end{aligned}$$

$$e^{\alpha_i,0t_{1,0}}t_{1,1} - e^{\alpha_i,0t_{2,0}}t_{2,1} + \dots + \frac{(-1)^{m+1}}{2}e^{\alpha_i,0t_{m,0}}t_{m,1} = a_i, \quad (3)$$

где $\xi_i = t_{m+i,1} - t_{m,1}$, $a_i = -\frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,0}}\left(\frac{z_i^0}{2D_1} + t_{1,0}e^{\alpha_i,0t_{1,0}} - t_{2,0}e^{\alpha_i,0t_{2,0}} + \dots + \frac{(-1)^m}{2}t_{n,0}e^{\alpha_i,0t_{m,0}}\right) + e^{\alpha_i,0t_{m,0}}\left((-1)^m\xi_1 + \dots + \frac{(-1)^{m+n-1}}{2}\xi_n\right)$, $i = 1, \dots, n$. Знак \pm определяется положением начальной точки. Для последующих приближений в асимптотическом разложении точек переключения получаются равенства, аналогичные второму и третьему уравнениям в (3).

3. Задача оптимального быстродействия для магнитоэлектрического силового привода

В инженерных применениях, там, где механизмы должны постоянно работать в цикле с большой скоростью, существенным является оптимальное управление. Также обстоит дело с магнитоэлектрическим силовым приводом с линейной характеристикой [6]. Оптимальное по времени управление требует определение того, что заставляет динамическую систему переходить от одного начального состояния в нужное конечное состояние за минимальное время. Как обычно, входная величина (напряжение, приложенное к приводу) ограничена, и управление является скалярным ($|u| = 1$). Уравнения состояния принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu}{m}x_2 + \frac{\alpha_1}{m}u \\ \varepsilon\dot{y} &= -\alpha_2x_2 - Ry + bu, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_1, α_2 – электромеханические константы взаимодействия, R – сопротивление, m – масса нагрузки, включая катушку и вал, μ – коэффициент вязкого трения, роль малого параметра ε играет индуктивность, u – оптимальное управление, $|u| \leq 1$. Требуется перевести данную систему из начального положения (x_1^0, x_2^0, y^0) в начало координат за минимальное время.

С помощью преобразования, описанного выше, разделим переменные в (4) [4].

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= -Kv_2 + \frac{\alpha_1 b}{mR}u, \\ \varepsilon\dot{z}_1 &= -(R - \varepsilon\frac{\alpha_1\alpha_2}{mR})z_1 + bu, \end{aligned} \quad (5)$$

где $K = K_0 + \varepsilon K_1 = \frac{\mu}{m} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{mR} + \varepsilon\left(\frac{\mu\alpha_1\alpha_2}{m^2R^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{m^2R^3}\right)$.

После приведения медленной подсистемы к диагональному виду, имеем:

$$\dot{v} = Av + Du, \quad \varepsilon\dot{z} = (-R + \varepsilon\frac{\alpha_1\alpha_2}{mR})z + bu, \quad (6)$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K_1 \end{pmatrix}$, $D = d_0 + \varepsilon d_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 b}{mRK_0} \\ \frac{\alpha_1 b}{mRK_0} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1 b K_1}{mRK_0^2} \\ \frac{\alpha_1 b K_1}{mRK_0^2} \end{pmatrix}$.

Точки переключения оптимального управления для рассматриваемой задачи делятся на две группы. Первая группа содержит точку переключения, близкую к соответствующей точке переключения в вырожденной задаче (при $\varepsilon = 0$): $t_1(\varepsilon)$. Вторая группа состоит из точки переключения $t_2(\varepsilon)$ управления вблизи начала координат, то есть она отстоит от оптимального времени t_3 на величину порядка $O(\varepsilon)$ [5]:

$$t_1 = t_{10} + \varepsilon t_{11} + \dots, \quad t_2 = t_{20} + \varepsilon t_{21} + \dots, \quad t_3 = t_{30} + \varepsilon t_{31} + \dots.$$

Отличие данной задачи быстродействия от рассмотренной для сингулярно возмущенной системы (1) [3] заключается в том, что имеется нулевое собственное значение, что не мешает воспользоваться предложенным в этой статье методом нахождения асимптотики точек переключения для линейной задачи быстродействия, где все собственные значения матрицы системы отличны от нуля, а напротив, упрощает некоторые уравнения. Так системы для нахождения асимптотики точек переключения выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} t_{10} - \frac{1}{2}t_{20} &= -\frac{v_{10}^0}{2d_1^0}, & e^{K_0 t_{10}} - \frac{1}{2}e^{K_0 t_{20}} &= \frac{1}{2} - \frac{v_{20}^0 K_0}{2d_2^0}, \\ t_{31} - t_{21} &= \frac{\ln 2}{R}, & t_{11} - t_{21} + \frac{1}{2}t_{31} &= -\frac{v_{11}^0 d_1^0 - v_{10}^0 d_1^1}{2(d_1^0)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{K_0 t_{10}} t_{11} - e^{K_0 t_{20}} t_{21} + \frac{1}{2}e^{K_0 t_{20}} t_{31} &= \\ = \frac{K_1}{K_0} \left(\frac{(v_{20}^0 K_1 + v_{21}^0 K_0) d_2^0 - d_2^1 v_{20}^0 K_0}{2d_2^0} - e^{K_0 t_{10}} t_{10} + \frac{1}{2}e^{K_0 t_{20}} t_{20} \right). \end{aligned}$$

Пример. Пусть $\mu = 0.1$, $m = 10$ г, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 1$, $R = 20$ м, $b = -25$, $\varepsilon = 0.01$. Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{200}x_2 + \frac{1}{40}y, \\ \varepsilon \dot{y} &= -x_2 - 2y + 10u. \end{aligned}$$

После соответствующих вычислений имеем: $t_{10} = 2.805$, $t_{20} = 5.498$, $t_{11} = 0.297$, $t_{21} = -0.042$, $t_{31} = 0.609$, а следовательно $t_1 = 2.8046$, $t_2 = 5.5006$, $t_3 = 5.5041$. Решения для $v_1(t)$, $z(t)$ выглядят следующим образом (на каждом временном интервале):

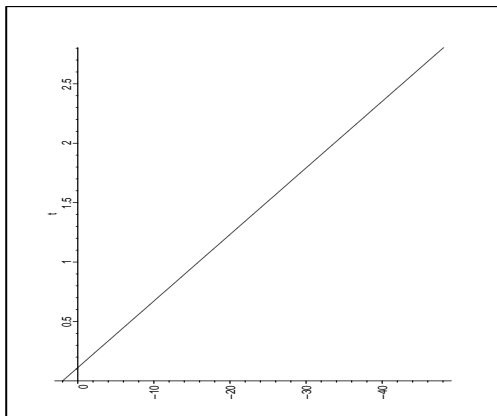


Рис. 1. $t \in [t_0, t_1]$.

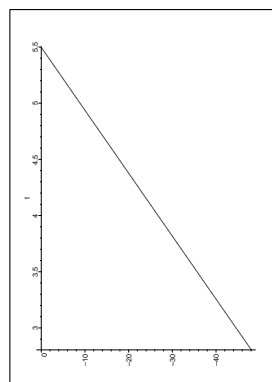


Рис. 2. $t \in [t_1, t_2]$.

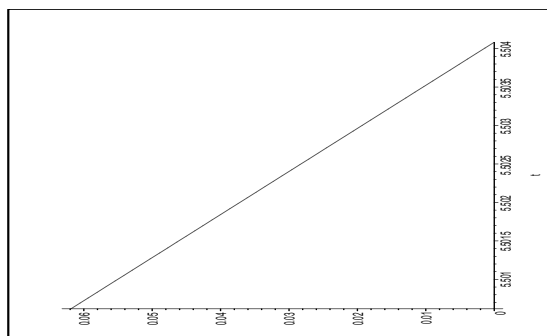


Рис. 3. $t \in [t_2, t_3]$.

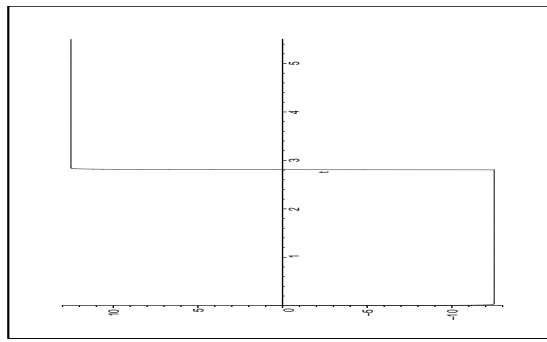


Рис. 4. Быстрая переменная.

4. Заключение

В настоящей работе с помощью метода декомпозиции движений для сингулярно возмущенных систем была исследована математическая модель магнитоэлектрического силового привода, найдено асимптотическое разложение точек переключения оптимального управления.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта № 16-41-630524 и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013-2020).

Литература

- [1] Бутковский А. Г. Управление нагревом металла / А. Г. Бутковский, С. А. Малый, Ю. Н. Андреев; М.: Metallurgy. – 1981.
- [2] Видилина О. В. Понижение порядка задачи оптимального быстродействия с сингулярными возмущениями / О. В. Видилина // Известия РАН серия МММИУ. – 1999. – Т.3, No 2. – С. 117-127.
- [3] Видилина О. В. Декомпозиция задач оптимального быстродействия с сингулярными возмущениями / О. В. Видилина // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – No 8. – С. 16-23.
- [4] Воропаева Н. В. Декомпозиция многотемповых систем / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев; Самара: СМС. – 2000.
- [5] Калинин А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем / А. И. Калинин; Мн.: "Экоперспектива". – 2000.
- [6] Brown C. J. Time-optimal Control of a Moving-Coil Linear Actuator / C. J. Brown, J. T. Mo // IBM J. Re S. Develop. – 1968. – 372 – 379.