

Решение переопределенных систем уравнений с отбором согласованной подсистемы

В.А. Фурсов^{1,2}, Е.В. Гошин^{1,2}, А.П. Котов¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

²Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

Аннотация. Мы рассматриваем задачу решения переопределенных систем уравнений, сформированных по малому числу наблюдений такому, что число степеней свободы имеет тот же порядок, что и число оцениваемых параметров. Мы применяем метод, в котором оценка строится на подсистеме (верхнего уровня), наиболее свободной от шума. Для ее определения на всех возможных подсистемах верхнего уровня строятся множества оценок на принадлежащих ей подсистемах (нижнего уровня). Идея метода опирается на предположение, что для наиболее свободной от шума подсистемы множество этих оценок будет более согласованным. В работе предлагается новый метод формирования согласованной подсистемы с использованием вспомогательной системы, полученной из исходной путем редукции по столбцам матрицы переопределенной системы. Формулируются условия, которым должна удовлетворять эта вспомогательная система. Приводятся результаты модельных экспериментов, иллюстрирующие эффективность метода.

1. Постановка задачи

Решается задача определения оценки $\hat{\mathbf{c}}$ $M \times 1$ -вектора $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_M]^T$ параметров переопределенной системы

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{c} + \boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

$$\text{где } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,M} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N,1} & x_{N,2} & \cdots & x_{N,M} \end{bmatrix},$$

$N \times 1$ -вектор и $N \times M$ -матрица соответственно, а $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T$ – вектор ошибок, приведенных к выходу модели. Предполагается что число N наблюдений, по которым сформирована система (1) невелико, т.е. число степеней свободы $S = N - M$ сравнимо с числом M оцениваемых параметров. Сформулированная задача встречается во многих приложениях. Примеры можно найти в работах [1, 2].

Для решения этой задачи часто используют метод наименьших квадратов (МНК)

$$\hat{c} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \tag{2}$$

Если объем выборки, используемой для определения параметров модели небольшой, появление в исходных данных даже небольшого числа выделяющихся ошибок измерений приводит к большим ошибкам МНК оценок. В работах [3, 4]. показано, что при малом числе наблюдений более эффективным является метод согласованного оценивания. Метод согласованных оценок состоит в поиске подсистемы (верхнего уровня) наиболее свободной от шума. Чтобы найти такую подсистему, для каждой подсистемы-претендента формируется множество оценок, вычисляемых на принадлежащих ей малых подсистемах (нижнего уровня) и определяется степень взаимной близости полученных оценок.

Для реализации этого метода, строго говоря, необходимо сформировать все возможные подсистемы верхнего уровня, а на каждой из этих подсистем сформировать все возможные подсистемы нижнего уровня. Ясно, что даже при сравнительно небольшой размерности исходной системы (1) в вычислительном отношении это сложная задача. В работе [5] предложен алгоритм формирования согласованных подсистем, который обеспечивает сохранение «хороших» свойств оценок при сравнительно небольших вычислительных затратах. Алгоритм строится в виде итеративной процедуры, на каждом этапе которой подавляется одна выделяющаяся ошибка (если ожидается, что число выделяющихся ошибок больше, процедура повторяется требуемое число раз). Последовательно «просматриваются» все N подсистем верхнего уровня, в которых отсутствует по одной строке исходной системы:

$$\mathbf{Y}_l = \mathbf{X}_l \mathbf{c}_l + \xi_l, \quad l = \overline{1, N} \tag{3}$$

где $\mathbf{X}_l - (N - 1) \times M$ -матрица l - й подсистемы верхнего уровня.

Далее из каждой такой подсистемы формируется $N - 1$ подсистем нижнего уровня:

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{c}_k + \xi_k, \quad k = \overline{1, N - 1} \tag{4}$$

размерности $M \times M$ путем циклического сдвига по строкам так, что каждая строка подсистемы верхнего уровня встречается в M подсистемах нижнего уровня. Далее для каждой подсистемы верхнего уровня вычисляется функция согласованности:

$$W(l) = \frac{2}{(N - 1)(N - 2)} \sum_{i,j=1, j>i}^{N-1} \|\hat{c}_{l,i} - \hat{c}_{l,j}\| \tag{5}$$

где $\|\hat{c}_{l,i} - \hat{c}_{l,j}\|$ – заданная норма разностей всех возможных парных сочетаний из $N - 1$ оценок на подсистемах нижнего уровня, принадлежащих l -й подсистеме верхнего уровня. Далее ищется \hat{l} -я подсистема верхнего уровня такая, что

$$W(\hat{l}): W(\hat{l}) = \min_{l=\overline{1, L}} W(l) \tag{6}$$

на которой затем вычисляется искомая оценка. Выбор подсистемы по критерию (6) обеспечивает сравнимость подсистем верхнего уровня в силу того, что все подсистемы верхнего и нижнего уровня имеют одинаковую размерность, а число подсистем нижнего уровня и схема их перебора в каждой подсистеме верхнего уровня одинаковы. Указанные требования являются обязательными в данной схеме формирования согласованной подсистемы. Заметим, что для построения итоговой оценки на согласованной подсистеме может использоваться любой известный метод.

В настоящей работе мы развиваем идею согласованного оценивания. В частности, мы рассмотрим новый алгоритм формирования согласованной подсистемы с использованием вспомогательной системы, полученной из исходной переопределенной системы (1) путем редукции столбцов матрицы системы.

2. Метод

Существо метода сводится к построению вспомогательной переопределенной системы

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{c}} + \xi \tag{7}$$

с $N \times P$ -матрицей \bar{X} , где всегда $P < M$. Задача состоит в том, чтобы построить эту систему таким образом, чтобы применение описанной в предыдущем разделе схемы построения согласованной подсистемы верхнего уровня к исходной системе (1) и к вспомогательной подсистеме (7) приводило к одинаковым наборам индексов строк. Для этого должно выполняться требование сохранения во вспомогательной системе всех переменных, которые могут содержать ошибки в тех же строках, как и в исходной системе (1). Таким образом, построение вспомогательной системы сводится к исключению из матрицы X переопределенной системы (1) столбцов, которые либо не содержат ошибок измерений, либо содержат повторяющиеся в тех же строках ошибки, которые содержатся также в предыдущих столбцах.

Предположим, что для выполнения указанных выше требований в матрице X переопределенной системы (1) достаточно оставить P столбцов. Поскольку всегда можно переставить столбцы, для определенности будем полагать что исключению подлежат последние $M - P$ столбцов. Исключение этих столбцов осуществим путём умножения матрицы X справа на блочную $M \times P$ -матрицу:

$$\bar{X} = X P, \tag{8}$$

где $P = \begin{bmatrix} E_p \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$, а E_p – единичная $P \times P$ -матрица.

Получающаяся в результате преобразования $N \times P$ -матрица \bar{X} , также как исходная матрица X , образует N -мерное пространство. Однако если исходная матрица X имела M -мерный базис, то матрица \bar{X} будет иметь P линейно-независимых строк (P -мерный базис). Следовательно, переопределенная вспомогательная система (7) будет иметь единственную МНК-оценку – $P \times 1$ -вектор

$$\hat{c} = (\bar{X}^T \bar{X})^{-1} \bar{X}^T Y \tag{9}$$

Векторы оценок \hat{c} и \hat{c} различаются, как по размерности, так и по числовым значениям компонентов, поскольку являются результатом МНК-проекции вектора Y на разные подпространства. Однако в данном случае нас не интересует точность воспроизведения параметров исходной модели. Наша цель – определение подсистемы, наиболее свободной от шума. Если в результате преобразования $\bar{X} = X P$ все переменные, которые могут содержать ошибки, встречаются хотя бы один раз, а исключаются только их повторные появления или комбинации, то номера строк наиболее согласованной подсистемы верхнего уровня, извлечённых из систем (1) и (7), скорее всего, будут совпадать.

Требование сохранения всех переменных, содержащих ошибки, является ключевым при построения преобразованной системы для определения номеров строк наиболее согласованной подсистемы. С учётом сказанного, алгоритм может строиться так как показано на рисунке 1.

Далее приводятся пример реализации описанного метода в задаче определения параметров полиномиальной модели формирования изображений, которая связывает геодезические координаты с координатами точек на изображении, которое регистрируется аэрокосмическими средствами наблюдения.



Рисунок 1. Алгоритм согласованного оценивания с редукцией столбцов.

3. Задача определения полиномиальной модели формирования изображений

Рассмотрим применение предложенного метода к решению задачи определения параметров полиномиальной модели формирования изображений в системах дистанционного зондирования Земли. При формировании снимков летательный аппарат (ЛА) находится в движении. Поэтому наряду с искажениями, связанными с внутренними параметрами камеры (фокусное расстояние, параметры масштабирования и дисторсии), вносятся трансформации изображений и искажения, связанные с внешними параметрами (параметрами движения ЛА). Поскольку внешние параметры камеры изменяются в полёте, их уточняют, обычно, с использованием полиномиальной модели.

Для определения параметров этой модели (RPC-коэффициентов) используется тестовое изображение, содержащее некоторое число так называемых опорных точек (точек привязки), координаты и относительные высоты которых известны. Точки привязки формируются с помощью GPS и/или маркеров на поверхности Земли. Исходные точки могут располагаться произвольным образом по полю изображения. Наборы искоемых RPC-коэффициентов **a**, **b**, **c**, **d** являются параметрами модели формирования изображения камерой спутника:

$$Y = (\mathbf{a}^T \mathbf{u}) / (\mathbf{b}^T \mathbf{u}), \quad X = (\mathbf{c}^T \mathbf{u}) / (\mathbf{d}^T \mathbf{u}) \tag{10}$$

Здесь Y, X – нормализованные координаты точки на изображении:

$$Y = (y - Y_0) / Y_s, \quad X = (x - X_0) / X_s, \tag{11}$$

где y, x – пиксельные координаты строки и столбца соответственно, Y_0, X_0 – нормализованные параметры смещения, а Y_s, X_s – нормализованные параметры масштабирования.

Вектор \mathbf{u} составлен из различных степеней (обычно до третьей степени включительно) координат трёхмерной точки P, L, H , полученных путём нормализации соответствующих им геодезических координат φ, λ, h :

$$P = (\varphi - \varphi_0) / \varphi_s, \quad L = (\lambda - \lambda_0) / \lambda_s, \quad H = (h - h_0) / h_s, \tag{12}$$

где φ, λ, h – широта, долгота и высота соответственно, $\varphi_0, \lambda_0, h_0$ – нормализованные параметры смещения, а $\varphi_s, \lambda_s, h_s$ – нормализованные параметры масштабирования. Далее без снижения общности мы рассмотрим простейший случай модели первого порядка с вектором

$$\mathbf{u} = [1, L, P, H]^T \tag{13}$$

Задача состоит в определении оценок параметров $\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{c}^T, \mathbf{d}^T$ по известным трёхмерным координатам P, L, H опорных точек и соответствующим этим точкам наблюдаемым на разноракурсных изображениях нормализованным координатам Y, X [6-9]. Для N опорных точек, координаты которых установлены на изображении, например, путём сопоставления фрагментов с заданными образцами с учетом (13) можно записать матричное уравнение (здесь и далее, в отличие от формулы (1), мы используем следующие обозначения)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{J} + \boldsymbol{\xi}, \tag{13}$$

где $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & L_1 & P_1 & H_1 & -Y_1 L_1 & -Y_1 P_1 & -Y_1 H_1 \\ 1 & L_2 & P_2 & H_2 & -Y_2 L_2 & -Y_2 P_2 & -Y_2 H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & L_N & P_N & H_N & -Y_N L_N & -Y_N P_N & -Y_N H_N \end{bmatrix},$

$$\mathbf{J} = [a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3]^T, \quad \mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]^T,$$

а $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T$ – вектор приведённых к выходу модели ошибок, связанных с ошибками порядка модели, неточным заданием трёхмерных геодезических координат и ошибками в определении координат опорных точек на реальном двумерном изображении.

Традиционно [1, 2] для решения сформулированной задачи используют метод наименьших квадратов (МНК). В соответствии с (13) МНК-оценка вектора параметров, составленного из искоемых RPC-коэффициентов, имеет вид:

$$\hat{\mathbf{J}} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{Y} \tag{14}$$

Известно, что МНК весьма чувствителен к грубым ошибкам типа сбоев [10-11]. Лучший результат достигается с использованием метода наименьших модулей (МНМ). Мы сравним эти методы с методом согласованного оценивания [3-5], в котором для формирования согласованной подсистемы применяется вспомогательная система, полученная из исходной системы (13) редукцией столбцов.

Нетрудно заметить, что в последних трёх столбцах матрицы \mathbf{M} в (13) в качестве сомножителей компонент вектора \mathbf{Y} фигурируют переменные L, P, H , которые присутствуют также в предыдущих столбцах. Поскольку вектор \mathbf{Y} присутствует также в левой части системы (13) ясно, что после исключения трёх последних столбцов из матрицы \mathbf{M} в преобразованной системе останутся все переменные, которые могут содержать ошибки. Таким образом, для определения наиболее согласованной подсистемы можно использовалась вспомогательную систему вида (7), которая в обозначениях настоящего раздела запишется как

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{J}} + \bar{\xi} \tag{15}$$

где $\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & L_1 & P_1 & H_1 \\ 1 & L_2 & P_2 & H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & L_N & P_N & H_N \end{bmatrix}$,

а вектор \mathbf{Y} тот же, что и в исходной системе (13). Для вспомогательной системы (15) выполняется сформулированное выше требование сохранения всех переменных, которые могут содержать ошибки (в данном случае Y, P, L, H). Поэтому в данном случае применим алгоритм формирования согласованной подсистемы, приведенный на рисунке 1. Заметим, поскольку в соответствии с (10) для каждого изображения должны определяться два набора RPC-коэффициентов: $\hat{\mathbf{J}}_Y, \hat{\mathbf{J}}_X$ функция согласованности (5) далее вычисляется как среднее значение функций $W_Y(l)$ и $W_X(l)$.

4. Результаты экспериментов

В качестве исходных данных в эксперименте использовались $N=10$ точек, равномерно распределённых по полю изображения «Горы» (Рисунок 2). Для проверки связи точности оценок параметров с функцией согласованности (5), в координаты (Y_i, X_i) , $i = \overline{1, N=10}$ каждой из 10-ти точек вносилась дополнительная случайная ошибка. Дополнительные ошибки формировались путём моделирования последовательности равномерно распределённых случайных чисел (РРСЧ) в интервале $[-0,1, 0,1]$.

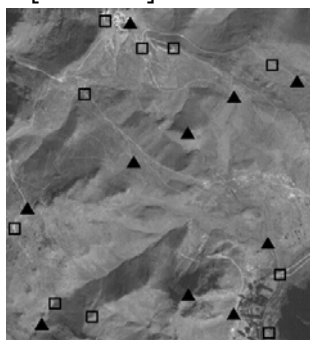


Рисунок 2. Изображение «Горы» с отмеченными точками обучающего – □ и проверочного – ▲ множеств.

В таблице 1 приведены значения функций согласованности (5) для каждой из 10-ти подсистем верхнего уровня, полученные в 10-ти реализациях алгоритма формирования согласованной подсистемы (Рисунок 1) с исключением одной строки. Значения функций согласованности (5) для всех 10-ти подсистем размерности $(N - 1)$ полученные в каждой k -ой реализации, сгруппированы в столбцах. В каждом k -м столбце l – номер подсистемы верхнего уровня, который совпадает с номером строки исходной системы (13), в которую вносилась дополнительная случайная ошибка. Нетрудно заметить, что в девяти из 10 случаев минимальное значение функции согласованности достигнуто в случае исключения строки, содержащей дополнительную ошибку. Только в третьей реализации ($k = 3$) минимальное значение функции согласованности (5) достигнуто при отбрасывании первой строки, в которую дополнительная ошибка не вносилась.

Таблица 1. Значения $W(l)$, увеличенные в 100 раз, для 10 реализаций.

$k \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,7	1,61	0,77	4,25	1,29	2,8	1,11	2,35	4,15	2,97
2	2,75	0,7	1,11	6,72	1,8	5,09	1,56	2,45	3,78	5,75
3	2,56	1,76	0,89	4,91	1,29	2,72	1,24	2,44	4,8	3,2
4	3,2	2,03	1	0,8	2,21	2,12	1,02	2,21	4,59	2,39
5	2,43	1,54	0,88	4,26	0,76	2,42	0,97	2,09	3,96	2,72
6	3,08	1,66	1,27	3,81	1,22	0,94	1,28	2,23	3,97	3,31
7	3,05	1,28	0,91	4,9	1,03	3,03	0,71	1,84	4,39	2,76
8	3,41	2,04	1,22	4,65	1,7	2,94	1,36	1,06	5,45	4,29
9	3,59	2,48	1,52	4,6	1,58	3	2,07	2,68	0,88	4,24
10	3,38	1,79	1,21	4,84	1,8	2,95	1,2	2,43	4,48	0,78

По-видимому, это связано с тем, что в этом случае дополнительная ошибка, которая формировалась как РРСЧ из интервала $[-0,1, 0,1]$ оказалась сравнимой с ошибками модели. Это подтверждается также данными таблицы 2, в которой приведены значения СКО, полученные на подсистемах верхнего уровня в тех экспериментах. Нетрудно заметить, что минимальные значения СКО в подавляющем большинстве случаев достигаются на тех подсистемах верхнего уровня, которые получены путём исключения строк по критерию минимума функции согласованности (6). Заметные отличия, как и следовало ожидать, только для реализации с номером $k = 3$. Однако для этой реализации СКО на всех подсистемах заметно меньше, чем для остальных реализаций, что ещё раз подтверждает объяснения, приведённые выше.

Таблица 2. Значения СКО для 10 реализаций (в пикселях).

$k \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,15	3,35	1,72	14,03	3,05	5,42	1,07	3,61	8,29	10,20
2	9,14	1,97	1,96	10,74	7,04	2,85	2,40	3,61	7,30	9,32
3	2,9	3,68	2,18	14,34	5,13	6,06	1,37	2,94	9,83	9,39
4	9,14	2,21	1,95	2,19	7,40	6,32	2,24	4,15	7,42	10,70
5	9,92	3,66	1,96	11,82	2,36	6,17	2,50	4,36	10,30	9,12
6	6,89	3,02	1,87	13,37	6,29	1,88	2,21	1,50	9,79	8,12
7	2,96	2,91	1,35	12,02	6,54	1,98	1,22	3,57	5,74	10,30
8	9,21	3,46	1,82	9,29	7,58	6,09	2,53	2,33	8,34	8,20
9	7,94	3,28	0,98	9,06	7,04	5,19	2,30	4,09	1,74	9,08
10	9,52	3,45	2,21	13,43	7,20	4,79	2,52	2,81	9,82	2,09

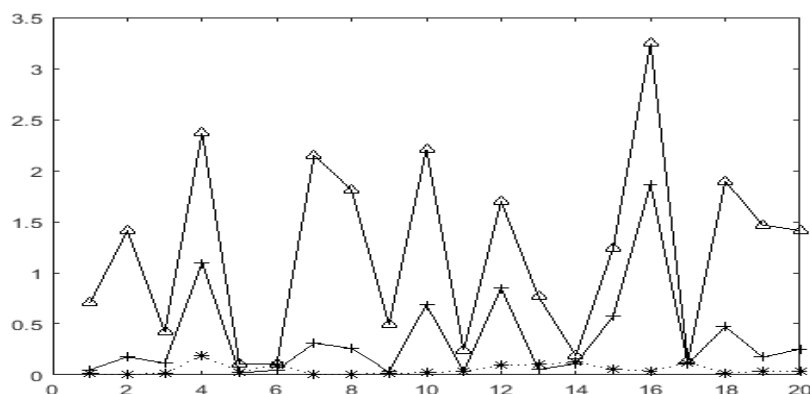


Рисунок 3. Ошибки МНК, МНМ и МСО.

На рисунке 3 приведен типичный график изменения ошибок оценивания по 20-ти малым наборам данных для трех методов: МНК – отмечены знаком (^), МНМ – (+) и МСО – (*).

Таблица 3. Сравнение на 1000 реализаций.

	МНК	МНМ	МСО
СКО	1,2410	0,5118	0,2298
САО	0,9843	0,2897	0,0581

В таблице 3 приведены значения среднеквадратической ошибки (СКО) и средней абсолютной ошибки (САО) полученные теми же тремя методами на тестовом примере по 1000 реализациям, сформированным по схеме повторных выборок. Использование описанного алгоритма обеспечивает уменьшение СКО оценок параметров более чем в 2 раза по сравнению с МНМ и более чем в 5 раз – по сравнению с МНК.

5. Заключение

Приведенные результаты показывают, что метод формирования согласованной подсистемы с использованием вспомогательной системы, полученной из исходной системы редукцией столбцов, обеспечивают более точную оценку RPC-коэффициентов по сравнению с методами МНК и МНМ. Установлена связь точности решений на подсистемах верхнего уровня переопределенной системы, с соответствующей этой подсистеме функцией согласованности.

6. Литература

[1] Мудров, В.И. Методы обработки измерений / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Советское радио, 1976. – 192 с.

[2] Лоусон, Ч. Численное решение задач методом наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

[3] Fursov, V.A. Estimates Conformity Principle in the Problems of Identification // International Conference on Computational Science, 2003. – P. 463-470.

[4] Fursov, V.A. Parametric Identification by Means of Consequent Formation of a Conformed Estimations / V.A. Fursov, A.V. Gavrilov, Ye.V. Goshin // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49(13). – P. 123-128.

[5] Fursov, V.A. Prediction of Estimates' Accuracy for Linear Regression with a Small Sample Size / V.A. Fursov, A.V. Gavrilov, A.P. Kotov // 41st International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP), 2018. – P. 679-685.

[6] Zheng, E. Minimal solvers for 3D geometry from satellite imagery / K. Wang, E. Dunn, J.M. Frahm // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision, 2015. – P. 738-746.

- [7] Grodecki, J. Block adjustment of high-resolution satellite images described by rational polynomials / J. Grodecki, G. Dial // *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*. – 2003. – Vol. 69(1). – P. 59-68.
- [8] Hu, Y. Understanding the rational function model: methods and applications / Y. Hu, C.V. Tao, A. Croitoru // *International archives of photogrammetry and remote sensing*. – 2004. – Vol. 20(6).
- [9] Tao, C.V. A comprehensive study of the rational function model for photogrammetric processing / Y. Hu, C.V. Tao // *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*. – 2001. – Vol. 67(12). – P. 1347-1358.
- [10] Афанасьев, А.А. Гибридные методы автоматизированной идентификации изменений ландшафтного покрова по данным дистанционного зондирования Земли в условиях шумов. / А.А. Афанасьев, А.В. Замятин // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41, № 3. – С. 431-440. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-3-431-440.
- [11] Холопов, И.С. Алгоритм коррекции проективных искажений при маловысотной съёмке // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41, № 2. – С. 284-290. DOI: 10.18287/0134-2452-2017-41-2-284-290.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2.7891) и РФФИ (проект № 17-29-03112).

Solution of overdetermined systems of equations using the conforming subsystem selection

V.A. Fursov^{1,2}, Ye.V. Goshin^{1,2}, A.P. Kotov¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

²Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

Abstract. We consider an overdetermined system of equations generated on small number of observations. The degrees of freedom of the overdetermined system and the number of observations are roughly equal. We propose a modification of the relative conforming method. The method improvement consists in the usage a supporting system, which is formed from initial system by the reduction of the number of columns. The estimates can be obtained on the top-level supporting subsystem, which the most free from noise. We consider our method in the problem of computing RPCs from well-established GCPs.