

# РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ФРАГМЕНТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Г.Р. Шамсутдинова, С.В. Викторов

Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного университета (СФ Баш ГУ), Стерлитамак, Россия

В работе рассматривается прямая и обратная задача. Решение обратных задач поиска деформации протяженных цилиндрических тел сводится к нахождению экстремали регуляризации функционала А. Н. Тихонова, в котором за основу берется решение прямой задачи о поле точечного источника в однородном полупространстве с цилиндрическим включением методом интегральных представлений.

**Ключевые слова:** прямая и обратная задача электроразведки, метод интегральных представлений, метод конфигурации, функция Грина, краевая задача.

## Введение

Актуальными задачами геофизики являются задачи поиска и разведки месторождений полезных ископаемых. С практической точки зрения изучение этих задач имеет большое значение, так как электрические методы поиска и разведки, являясь для недр экологически безопасными, наиболее эффективно позволяют исследовать залежи полезных ископаемых, оценить их размеры и форму.

Возникающие при рассмотрении физико-математических основ электрических методов разведки теоретические задачи, которые заключаются в нахождении формы исследуемого включения, относятся к классу обратных задач геофизики.

В данной работе решается обратная задача поиска участка деформации протяженного цилиндрического включения, расположенного в однородной среде. Решение задачи сводится к поиску параметров описания границы поверхности исследуемого цилиндра.

## Постановка задачи

Пусть в однородном изотропном полупространстве  $\Omega_0$  с удельной электрической проводимостью  $\sigma_0$  в плоскости  $xOy$ , на расстоянии  $z = z_0$ , параллельно оси  $Ox$  расположено протяженное включение  $\Omega_1$  цилиндрической формы с удельной электрической проводимостью  $\sigma_1$ . На участке  $x \in [a, b]$  цилиндр имеет деформацию (сдвиг вдоль оси  $Oy$ ) (рис. 1). Решение задачи сводится к поиску параметров  $a$  и  $b$ , которые определяют участок искривления протяженного тела. Такая деформация может образоваться в результате смещения слоев почвы при оползнях, землетрясениях и других природных явлениях имеющих разрушительный характер.

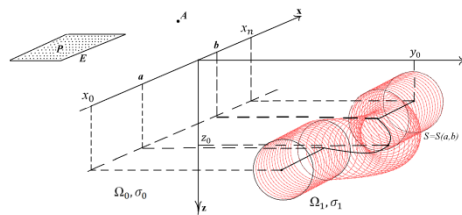


Рис. 1. Цилиндрическое включение в однородном изотропном полупространстве

Решение обратной задачи поиска параметров  $[a, b]$  протяженного включения  $\Omega_1$  цилиндрической формы с удельной электрической проводимостью  $\sigma_1$ , которое горизонтально размещено в однородном полупространстве  $\Omega_0$  с удельной проводимостью  $\sigma_0$ , заключается в поиске экстремали функционала А.Н. Тихонова вида:

$$F^\alpha(S) = F_1(S) + \alpha \cdot F_2(S) = \|u(A, P, S) - u^e(A, P)\|_{L_2}^2 + \alpha \cdot \|S - S^e\|_{W_2^1}^2, \tag{1}$$

где  $S = S(a, b)$  функция параметрического описания поверхности деформируемого на участке  $[a, b]$  цилиндра  $\Omega_1$ ,  $u^e(A, P)$  – экспериментальные геофизические данные изменений, полученные на области  $E$  «дневной» поверхности, представляющие собой значения, потенциального поля точечного источника постоянного тока интенсивности  $I$ , возбуждаемого в точке источника  $A$  и точке приемника  $P$  ( $A, P \in \Omega_0$ ),  $u(A, P)$  – модельное решение прямой задачи о поле точечного источника, представляемой в виде следующий краевой задачи эллиптического типа [1]:

$$\Delta u_0(A, P, S) = -\frac{I}{\sigma_0} \delta(P - A), \text{ при } P \in \Omega_0; \tag{2}$$

$$\Delta u_1(P, S) = 0, \text{ при } P \notin \Omega_0; \tag{3}$$

$$\left. \frac{\partial u_0(P, S)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \tag{4}$$

$$u_0(P, S)|_S = u_1(P, S)|_S; \tag{5}$$

$$\sigma_0 \left. \frac{\partial u_0(P, S)}{\partial n} \right|_S = \sigma_1 \left. \frac{\partial u_1(P, S)}{\partial n} \right|_S; \tag{6}$$

$$u_0(P, S) \rightarrow 0 \text{ при } P \rightarrow \infty, \tag{7}$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\delta$  – функция Дирака, условие (4) определяет соответственно изолированность дневной поверхности, (5) и (6) – условия непрерывности потенциала и плотности тока соответственно, (7) – условие регулярности решения на бесконечности.

К задаче (2) и (7) применим метод интегральных представлений ее решения, который формируется на основе интегральных преобразований с построением функции Грина для вмещающего пространства.

Выбрав, в соответствии с методом, в качестве содержащей цилиндр среды однородное полупространство, построим для него математическую модель – подзадачу для функции точечного источника (функции Грина  $G(P, Q)$ ).

$$\Delta G_Q(Q, P) = -\delta(P - Q) \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial G_Q}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (9)$$

$$G(P) \rightarrow 0 \text{ при } P \rightarrow \infty \quad (10)$$

Для случая однородного полупространства функция Грина имеет вид:

$$G(P, A) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2}} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P + z_A)^2}}$$

В соответствии с применяемым методом выпишем интегральное представление решения прямой задачи и интегральное уравнение относительно неизвестных граничных значений потенциала на границе цилиндрического включения. Для этого рассмотрим следующую формулу:

$$\int_{\Omega} [\Delta u(Q) \cdot G(P, Q) - \Delta G(P, Q) \cdot u(Q)] d\Omega_Q = \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \cdot G(P, Q) - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \cdot u(Q) \right] d\{\partial\Omega_Q\}$$

Применим ее для областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ , получим формулу (11) интегрального представления решения и интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (12) относительно неизвестных граничных значений потенциала  $u(Q)$ .

$$u(P) = \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{\sigma_0} \int_S \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \cdot u(Q) d\{S\} + \frac{I \cdot G(P, A)}{\sigma_0}, \quad (11)$$

$$u(P) = \frac{2 \cdot (\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_S \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \cdot u(Q) d\{S\} + \frac{2 \cdot I \cdot G(P, A)}{(\sigma_0 + \sigma_1)}. \quad (12)$$

Таким образом, решение задачи определяется формулой (11), которая представляет собой определённый интеграл в случае вычисленных по формуле (12) значений  $u(Q)$  на границе  $S$ . Для численной реализации решения формулы (11) и (12) приводятся к дискретному виду.

$$u(P) - \lambda \int_S K(P, Q) \cdot u(P, Q) d\{S\} = F(P), \quad (13)$$

$$\lambda = 2 \cdot \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1}, \quad F(P) = 2 \cdot \frac{I \cdot G(P, A)}{\sigma_0 + \sigma_1}, \quad K(P, Q) = \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n}.$$

Представим формулу (13) в дискретном виде, когда точки P и Q размещаются в дискретной области  $S_\Delta$ .

$$S \rightarrow S_\Delta, P \rightarrow P_i, Q \rightarrow Q_j, i, j \in [0, N],$$

$$u(P_i) - \lambda \cdot \sum_{j=0}^N \left[ \int_{\Delta_j} K(P_i, Q_j) d\{\Delta_j\} \cdot u(Q_j) \right] = F(P_i), i \in \overline{0, N}$$

$$u_i - \lambda \cdot \sum_{j=0}^N \int_{\Delta_j} \overline{K_{i,j}} \cdot u_j d\{\Delta_j\} = F_i$$

где  $\overline{K_{i,j}} = \int_{\Delta} K_{i,j} d\{\Delta\}$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $N$  – общее количество точек.

Предлагаемый в работе метод является универсальным методом понижения геометрической сложности исследуемой среды. С другой стороны этот метод может быть использован также для поэтапного усложнения геометрии модели.

Для решения прямой задачи была реализована процедура для построения поверхности цилиндрического включения, соответствующего формулам параметрического описания цилиндра:

$$x \in [x_0, x_n], \varphi \in [0, 2\pi), [a, b] \subseteq [x_0, x_n]:$$

$$\begin{cases} X(\varphi, x) = x_0 + x, \\ Y(\varphi, x) = y_0 + \begin{cases} R \cdot \sin(\varphi), & x \notin [a, b], \\ R \cdot \sin(\varphi) + L_2(x), & x \in [a, b] \end{cases} \\ Z(\varphi, x) = z_0 + R \cdot \cos(\varphi). \end{cases}$$

где  $i = \overline{0, N}$ ,  $L_2(x)$  – функция интерполяционного многочлена Лагранжа для вычисления деформации протяженного цилиндрического включения на отрезке  $[a, b]$ , который вычисляется по формуле:

$$c = 0.5 \cdot (a + b), \quad d = 0.1 \cdot (b - a):$$

$$L_2(x) = \frac{(x-c) \cdot (x-b)}{(a-c) \cdot (a-b)} \cdot y_0 + \frac{(x-a) \cdot (x-b)}{(c-a) \cdot (c-b)} \cdot (y_0 + d) + \frac{(x-a) \cdot (x-c)}{(b-a) \cdot (b-c)} \cdot y_0$$

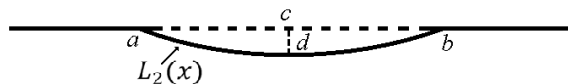


Рис. 2. Направляющая цилиндра с деформацией

Для решения обратной задачи предлагается алгоритм поиска минимума функционала вариационного типа реализованный методом конфигураций, ориентированным на поиск глобального минимума сильно-овражных функций.

При поиске локального включения варьируемыми параметрами является отрезок  $[a, b]$ . Тогда алгоритм метода минимизации определяется следующим образом:

Пусть задано начальное приближение  $x^{(k)} = (a^{(k)}, b^{(k)})$ ,  $k = 0$ . Найдем  $a$  и  $b$  следующим образом:

$$a = \begin{cases} a^+, & \text{если } F(a^+, \tilde{b}) < F(\tilde{a}, \tilde{b}), \text{ где } a^+ = \min(a_{\max}, a + h) \\ a^-, & \text{если } F(a^-, \tilde{b}) < F(\tilde{a}, \tilde{b}), \text{ где } a^- = \max(a_{\min}, a - h) \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} b^+, & \text{если } F(\tilde{a}, b^+) < F(\tilde{a}, \tilde{b}), \text{ где } b^+ = \min(b_{\max}, b + h) \\ b^-, & \text{если } F(\tilde{a}, b^-) < F(\tilde{a}, \tilde{b}), \text{ где } b^- = \max(b_{\min}, b - h) \end{cases}$$

Если при этом  $F(a, b) < F(\tilde{a}, \tilde{b})$ , то за приближение берется значение, полученное по правилу  $a^{(k+1)} = \tilde{a} + l(\tilde{a} - a)$ ,  $b^{(k+1)} = \tilde{b} + l(\tilde{b} - b)$ , где  $l$  – коэффициент увеличения шага сходимости, иначе уменьшается шаг:  $h$  ( $h = h/2$ ). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие окончания алгоритма: если шаг сходимости  $h \geq \varepsilon$ , то поиск прекращается и выбирается  $a^{(k+1)}$ ,  $b^{(k+1)}$  в качестве решения.

Для поиска решения обратной задачи и проведение вычислительного эксперимента реализовано программное средство [2].

## Литература

1. Викторов С.В. Математическое моделирование геоэлектрических полей в осесимметричных средах со сплайн-аппроксимацией границ. Дисс. ... к.ф.-м.н., Стерлитамак, 2005, 106 с.
2. Шамсутдинова Г.Р., Викторов С. В. Прямая задача о поле точечного источника в однородной среде с цилиндрическим включением // Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 75-летию физико-математического факультета, Часть 2 «Математическое моделирование процессор и систем». – Стерлитамак, 2015.- С. 315 – 320.