Решение дифференциального уравнения переноса тепла в атмосфере

В.С. Ножкин[1], М.Е. Семёнов[1,2], И.И. Ульшин[1]

[1]ВУНЦ ВВС ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Старых Большевиков 54А, Воронеж, Россия, 394064
[2]Воронежский государственный университет, Университетская площадь 1, Воронеж, Россия, 394018

Аннотация. В представленной работе предлагается модель переноса тепла в атмосфере, основанная на стохастической трактовке компонент вектора скорости. Приводятся гистограммы распределения скорости ветра, усредненные за относительно небольшой промежуток времени. На основе эмпирических распределений формулируется указанная модель. Приводятся явные формулы математического ожидания и второй моментной функции решения уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами.

1. Введение

Основным источником тепла для нашей планеты и ее составной части – атмосферы – является солнечная радиация, большая часть которой достигает земной поверхности. Тропосфера получает тепло главным образом от поверхности Земли. В переносе тепла от поверхности к атмосфере и внутри атмосферы основную роль играют следующие процессы: а) конвективный и турбулентный теплообмен; б) излучение и поглощение радиации; в) фазовые превращения воды; г) молекулярный теплообмен [1, 2].

Воздух находится в непрерывном движении. Вместе с перемещающимися частицами (массами) воздуха переносится и теплосодержание этих частиц. Образующийся поток тепла складывается из двух составляющих: конвективной и турбулентной. Турбулентный поток тепла обусловлен пульсациями скорости переноса. Конвективный поток тепла обусловлен упорядоченным перемещением воздуха со средней скоростью, при этом конвективный поток тепла представляет собой перенос тепла преимущественно по горизонтали и чаще применяется в моделях на микроуровне [1, 2].

Использование уравнений притока тепла в гидродинамическом моделировании широко распространено. При использовании гидродинамических моделей оперируют усредненными значениями метеорологических элементов. В прогностических моделях мезо- и макроуровня использование усредненных значений метеорологических величин в уравнениях гидродинамики, несомненно, оправдано, но на микроуровне такие упрощения не всегда являются корректными, и требуется принимать во внимание существенные неоднородности в поле ветра.

При непериодических изменениях температуры выше пограничного слоя за сравнительно небольшие интервалы времени процесс считается адиабатическим [1, 2]. В этом случае уравнение притока тепла имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+u\frac{\partial U}{\partial x}+v\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{(\gamma_a-\gamma)}{g\rho}\tau\,, \tag{1}$$

где U – температура воздуха; u, v – проекции вектора скорости движения частицы на оси локальной системы координат; γ_a – сухоадиабатический градиент температуры; γ – вертикальный градиент температуры; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность воздуха; τ – аналог вертикальной скорости в p-системе координат.

Выражение (1) является неоднородным и применяется совместно с гидродинамической системой уравнений движения воздушных масс [1, 2, 3]. В рамках гидродинамического моделирования в выражении (1) используются усредненные значения компонент вектора скорости. Фактические же значения, как показывают наблюдения, склонны к неупорядоченным хаотическим возмущениям, учет которых затруднителен в рамках традиционных подходов.

2. Постановка задачи

Предложенный подход позволяет учитывать турбулентные свойства атмосферы, приводящие к возникновению хаотических пульсаций воздуха, и использовать для этого стохастические методы [4-8]. В этом случае естественно трактовать проекцию вектора скорости случайным процессом, закон распределения которого подлежит определению. Для упрощения расчетов не принимаются во внимания вертикальные движения воздуха, ось x направляется по направлению преимущественного переноса воздушной массы и вводится обозначение $f(x)=\frac{(\gamma_a-\gamma)}{g\rho}\tau$. Функцию $f(x)$ будем считать детерминированной. Таким образом, уравнение (1) перепишется в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\varepsilon_1(t)\frac{\partial U}{\partial x}=f(x)\,. \tag{2}$$

где $\varepsilon_1(t)$ – случайный процесс, связанный со значениями проекций скорости ветра.

С детерминированным начальным условием:

$$U(t_0,x)=U_0(x)\,; \tag{3}$$

Процесс рассматривается на всей числовой оси ($-\infty < x < \infty$).

Таким образом, целью настоящей работы является решение задачи (2), в котором компоненты вектора скорости являются мгновенными характеристиками турбулентных движений и трактуются как случайные процессы. Решение данной задачи позволит на модельном уровне учесть турбулентные свойства атмосферы в наглядном виде.

3. Статистические характеристики горизонтальных атмосферных движений

В целях дальнейших расчетов необходимо установить закон распределения проекции вектора скорости. Для определения данного закона распределения была проведена серия экспериментов, которая заключалась в получении мгновенных данных направления и скорости ветра. По полученным данным были рассчитаны значения проекции вектора скорости на соответствующую ось. Далее были построены гистограммы распределения. В качестве примера приведены несколько гистограмм на рисунках 1–3.

На начальном этапе анализа гистограмм были определены оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса. Исходя, из полученных значений коэффициентов выдвинута гипотеза о нормальности распределения проекции вектора скорости. Для проверки данного предположения использовался метод К. Пирсона и метод А. Колмогорова, при этом вводились два уровня значимости α = 0,05 и 0,1. Проведенная проверка на нормальность показала, что выдвинутая гипотеза в 60 % случаев не отвергалась. В других случаях данная гипотеза не была принята.

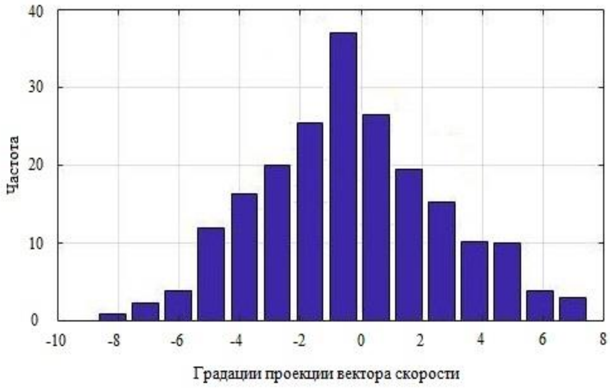

Рисунок 1. Гистограмма распределения проекции вектора скорости.

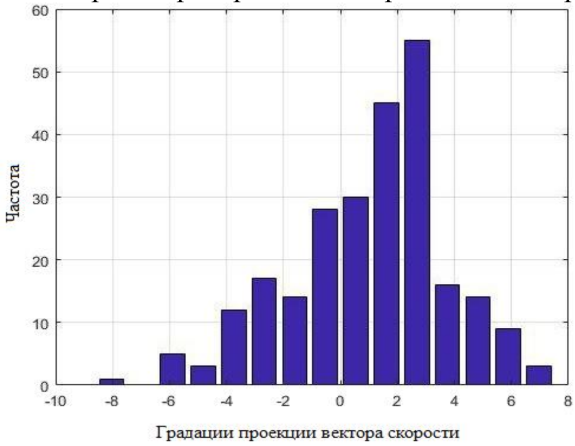

Рисунок 2. Гистограмма распределения проекции вектора скорости.

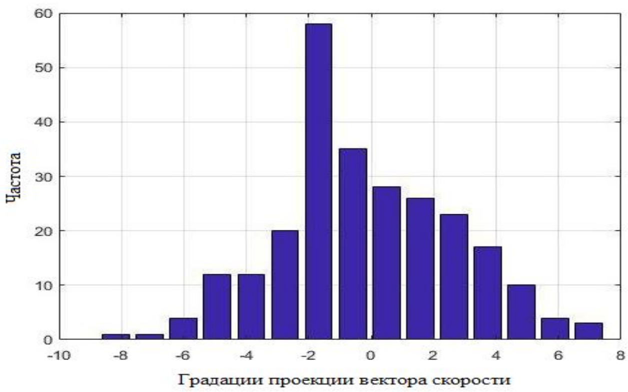

Рисунок 3. Гистограмма распределения проекции вектора скорости.

4. Решение уравнение переноса тепла

Случайный процесс будем считать заданным посредством характеристического функционала [5]:

$$\varphi(\nu) = M\left[\exp(i\int_0^t \varepsilon_1(\tau)\nu(\tau)d\tau)\right], \qquad (4)$$

где функция ν принадлежит пространству $L_1(T)$ суммируемых на отрезке T функций с нормой $\|\nu\| = \int_0^t |\nu(\tau)| d\tau$; T – отрезок времени, на котором изучается процесс [0;t]; M – математическое ожидание по функции распределения процесса $\varepsilon_1(t)$. В настоящей работе ставится задача определения первых двух моментных функций решения уравнения (2) с начальным детерминированным условием (3).

Один из методов решения этой задачи связан с переходом к эквивалентному детерминированному уравнению на основе подхода, развитого в работах [4-6] и связанного с понятием вариационной производной.

Умножив уравнение (2) на $\exp(i\int_0^t \varepsilon_1(\tau)\nu(\tau)d\tau)$ и определив математическое ожидание полученного равенства, можно записать:

$$M\left[\frac{\partial U}{\partial t}\exp(i\int_0^t \varepsilon_1(\tau)\nu(\tau)d\tau)\right] = M\left[-\varepsilon_1(t)\frac{\partial U}{\partial x}\exp(i\int_0^t \varepsilon_1(\tau)\nu(\tau)d\tau)\right] + f(x)M\left[\exp(i\int_0^t \varepsilon_1(\tau)\nu(\tau)d\tau)\right]. \quad (5)$$

Для дальнейших вычислений введем в рассмотрение отображение:

$$y(t,x,\nu) = M\left[U(t,x)\exp(i\int_0^t \varepsilon_1(\tau)\nu(\tau)d\tau)\right], \quad (6)$$

где $t \ge t_0; x \in R; \nu(t) \in L_1(T)$.

С учетом отображения (6), полученное равенство (5) запишется в виде:

$$\frac{\partial y(t,x,\nu)}{\partial t} = i\frac{\delta}{\delta \nu(t)}\frac{\partial}{\partial x}y(t,x,\nu) + f(x)\varphi(\nu). \quad (7)$$

Начальное условие для выражения (7), с учетом введенного отображения примет вид:

$$y(t_0,x,\nu) = U_0(x)\varphi(\nu). \quad (8)$$

где $U(t_0,x)M\left[\exp(i\int_0^t \varepsilon_1(\tau)\nu(\tau)d\tau)\right] = U_0(x)M\left[\exp(i\int_0^t \varepsilon_1(\tau)\nu(\tau)d\tau)\right]$.

Подход к решению дифференциального уравнения с частной и обыкновенной производной, выраженного равенством (7) при начальном условии (8), описан в работах [4-6]. В результате применения данного подхода математическое ожидание решения задачи (2) при начальном условии (3) примет вид:

$$M(U(t,x)) = U_0(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}[\varphi(\xi\chi(0,t))] + f(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\int_0^t \varphi(\xi\chi(\tau,t))d\tau\right], \quad (9)$$

где $\overset{x}{*}$ – знак свертки функций по *x*; F_ξ^{-1} – обратное преобразование Фурье по ξ; ξ – двойственная к *x* характеристика; χ – функция, зависящая от трех переменных $\chi(\tau,w,t)$ следующим образом: $\chi(\tau,w,t) = sign(w-\tau)$ при w, принадлежащем отрезку с концами τ,t и $\chi(w,t,\tau)=0$ в противном случае.

Вторая моментная функция решения уравнения (2) определяется выражением:

$$\begin{aligned} M(U(t,x)U(\gamma,x_1)) &= U_0(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}[\varphi(\xi\chi(0,t)) + i\xi\chi(0,\gamma))] + \\ &+ f(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\int_0^t \varphi(\xi\chi(\tau,t)) + i\xi\chi(0,\gamma))d\tau\right] \end{aligned}. \quad (10)$$

Дисперсионная функция $D(U(t,x)) = M(U^2(t,x)) - (M(U(t,x)))^2$ решения уравнения (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} D(U(t,x)) &= U_0^2(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}[\varphi(2\xi\chi(0,t))] + f(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\int_0^t \varphi(2\xi\chi(\tau,t))d\tau\right] - \\ &-\left(U_0(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}[\varphi(\xi\chi(0,t))] + f(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\int_0^t \varphi(\xi\chi(\tau,t))d\tau\right]\right)^2 \end{aligned}. \quad (11)$$

Равенства (9), (10) определяют математическое ожидание и вторую моментную функцию решения дифференциального уравнения (2) с начальным условием (3). Данные равенства получены для случайного процесса, характеристический функционал которого задан в виде (4). В зависимости от закона распределения случайного процесса, будет изменяться и его характеристический функционал. С учетом определения закона распределения проекции вектора скорости, рассмотрим, как запишутся статистические характеристики решения уравнения (2) в случае гауссова распределения.

4.1 Решение уравнение переноса тепла в случае гауссова распределения

В случае гауссова распределения случайного процесса входящего в уравнение (2) характеристический функционал имеет вид:

$$\varphi(\nu)=\exp\left(i\int_T M(\varepsilon_1(\tau))\nu(\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(\tau_1,\tau_2)\nu(\tau_1)\nu(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right), \tag{12}$$

где $b(\tau_1,\tau_2)=M(\varepsilon_1(\tau_1)\varepsilon_1(\tau_2))-M(\varepsilon_1(\tau_1))M(\varepsilon_1(\tau_2))$ – ковариационная функция процесса ε_1.

На основании вышесказанного математическое ожидание $M(U(t,x))$ решения задачи (2) с начальным условием (3) имеет вид:

$$\begin{aligned}M(U(t,x))&=U_0(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\exp\left(i\xi\int_0^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)\right]+\\&+f(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\int_0^t\exp\left(i\xi\int_0^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)d\tau\right]\end{aligned} \tag{13}$$

Вторая моментная функция решения уравнения (2) при гауссовом распределении случайного процесса запишется в виде:

$$\begin{aligned}M[U(t,x)U(\gamma,x_1)]&=U_0^2(x_1)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}[\exp(i\xi\int_0^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau+i\xi\int_0^\gamma M(\varepsilon_1(\tau))d\tau-\\&-\frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-\xi^2\int_0^t\int_0^\gamma b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-\frac{1}{2}\xi^2\int_0^\gamma\int_0^\gamma b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2)]+\cdot\\&+f(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\int_0^t\exp\left(i\xi\int_0^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)d\tau\right]\end{aligned} \tag{14}$$

При этом дисперсионная функция будет иметь вид:

$$\begin{aligned}D(U(t,x))&=(U_0^2(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\exp\left(2i\xi\int_0^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau-\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)\right]+\\&+f(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\int_0^t\exp\left(2i\xi\int_0^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau-\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)d\tau\right])-\\&-(U_0(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\exp\left(i\xi\int_0^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)\right]+\\&+f(x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\int_0^t\exp\left(i\xi\int_0^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)d\tau\right])^2\end{aligned}. \tag{15}$$

5. Заключение

В настоящей статье предложена модель переноса тепла в атмосфере, позволяющая учитывать ее турбулентные свойства в рамках стохастических методов. Показано, что на малых временных интервалах компоненты вектора скорости являются случайными величинами с нормальным законом распределения, на основе сделанных выводов и формулируется указанная модель. Получены явные формулы математического ожидания и второй моментной функции решения уравнения притока тепла со случайными коэффициентами в общем виде и для гауссова распределения.

6. Литература

[1] Матвеев, Л.Т. Физика атмосферы / Л.Т. Матвеев. – СПб.: Гидрометеоиздат, 2000. – 778 с.
[2] Белов, Я.Н. Численные методы прогноза погоды / Я.Н. Белов, Е.П. Борисенков, Б.Д. Панин. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 376 с.
[3] Фрик, П.Г. Турбулентность: Подходы и модели / П.Г. Фрик. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 291 с.
[4] Zadorozhniy, V.G. A linear firet-order differential equation with ordinary variational derivatives / V.G. Zadorozhnii // Moscow: Pleiades Publishing, Ltd. – 1993. – Vol. 53. – P. 383-388.
[5] Zadorozhniy, V.G. Linear chaotic resonance in vortex motion / V.G. Zadorozhnii // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 53(4). – P. 486-502.
[6] Ножкин, В.С. Решение дифференциального уравнения переноса влаги в атмосфере / В.С. Ножкин, И.И. Ульшин // Сборник материалов международной научной конференции. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2018. – С. 247-255.
[7] Oksendal, B. Stochastic differential equations: book / B. Oksendal. – Berlin: Springer, 2003. – 379 p.
[8] Liptser, R.S. Statistics of random processes. 1: General theory / R.S. Liptser, A.N. Shiryaev. – Berlin: Springer, 2001. – 395 p.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 17-01-00251 и № 19-08-00158).

Solution of the differential equation of heat transfer in the atmosphere

V.S. Nozhkin[1], M.E. Semenov[1,2], I.I. Ulshin[1]

[1]MESC AF N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Starikh Bolshevikov 54A, Voronezh, Russia, 394064
[2]Voronezh State University, Universitetskaya pl. 1, Voronezh, Russia, 394018

Abstract. In this work a model of atmosphere heat transfer is proposed. This model is based on a stochastic interpretation of the wind speed field. The wind speed distribution histograms are presented in paper. The basic model is formulated using the empirical distributions. Explicit expressions for the mathematical expectation and the second moment function of the solution with random coefficients are proposed.