Редукция задачи оптимального управления для магнитоэлектрического силового привода

О.В. Видилина[1], Н.В. Воропаева[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления для сингулярно возмущенной дифференциальной системы, описывающей динамику магнитоэлектрического силового привода. Оптимальное управление ищется в виде обратной связи. Использование метода интегральных многообразий позволяет понизить порядок матричного дифференциального уравнения Риккати.

1. Введение

Динамика линейного магнитоэлектрического силового привода описывается системой дифференциальных уравнений, содержащей малый множитель при части производных [1,2]. Использование геометрического подхода, в частности теории интегральных многообразий [2-4], позволяет во многих случаях понижать размерность моделей и устранять вычислительную жесткость. Метод интегральных многообразий использовался при решении задач оптимального управления для динамических систем различной природы, отличительной особенностью которых является наличие малых параметров и переменых с существенно различными скоростями изменения [4-10].

В работе [2] рассматривалась задача оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной модели линейного магнитоэлектрического привода. Построены асимптотические разложения для точек переключения.

В работе [1] раассматривалась линейно-квадратичная задача оптимального управления на конечном промежутке времени для магнитоэлектрического привода. Для построения оптимального управления использовался подход, основанный на решении краевой задачи принципа максимума. Произведена декомпозиция линейной сингулярно возмущенной краевой задачи на краевую задачу для медленных переменных и две начальных задачи для быстрых переменных. В настоящей работе для синтеза управляющего воздействия используется подход, базирующийся на решении матричного дифференциального уравнения Риккати. Использование метода интегральных многообразий позволяет понизить порядок рассматриваемого уравнения и, тем самым, упростить задачу построения оптимального закона управления.

2. Постановкам задачи

Рассматривается математическая модель системы, состоящей из линейного магнитоэлектрического силового привода, представляющего собой катушку, движущуюся в просвете постоянного магнита, и перемещаемого груза [11–13]

$$\begin{aligned} &U(t) = I(t)R + L\dot{I}(t) + K_e v(t) \\ &m\dot{v}(t) + Bv(t) = K_F I(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $U = U(t)$ — входное напряжение, $I = I(t)$ — сила тока в катушке, L — индуктивность катушки, R — сопротивление, $E = K_e v(t)$ — противо-ЭДС, m — масса нагрузки, включая катушку, B — коэффициент вязкого трения, $F = K_F I$ — действующая сила привода (сила Лоренца), $x = x(t)$ — перемещение движущейся части, $v = v(t) = \dot{x}(t)$ — линейная скорость. Индуктивность катушки предполагается малой.

Введем следующие переменные состояния: $x_1 = x$, $x_2 = v$, $y = I$, малый параметр $\varepsilon = L$ и перепишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_2 + \alpha_1 x_3, \\ \varepsilon \dot{x}_3 &= -\alpha_2 x_2 - R x_3 + u, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mu = B/m,\ \alpha_1 = K_F/m,\ \alpha_2 = K_e$.

Рассматрим задачу минимизации квадратичного критерия

$$J = \int_0^1 (\beta_1 x_1^2(t) + \beta_2 x_2^2(t) + \beta_3 x_3^2(t) + \gamma u^2(t))dt, \quad \beta_j \geq 0,\ j = \overline{1,3},\ \gamma > 0 \tag{3}$$

на траекториях системы (2) с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = x_{30}. \tag{4}$$

Управляющим воздействием в данной задаче является входное напряжение $u = U(t)$.

Перепишем систему (2), (4) в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \ x \in R^3,\ \ x(0) = x_0, \tag{5}$$

а функционал качества (3) в виде

$$J = \int_0^1 x^T(t) Q x(t) + \gamma u^2(t) dt. \tag{6}$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ A = A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3/\varepsilon & A_4/\varepsilon \end{pmatrix},\ B = B(\varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2/\varepsilon \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Q_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = (0, -\alpha_2),\ \ A_4 = -R,\ \ B_2 = 1,\ \ Q_3 = \beta_3.$$

Первые две компоненты x_1, x_2 вектора x — медленные переменные, а x_3 — быстрая переменная.
Оптимальное управление в данной задаче задается формулой

$$u = -\frac{1}{\gamma} B^T K x, \tag{7}$$

где матричная функция $K = K(t,\varepsilon)$ является решением матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K} + A^T K + KA - KSK + Q, \quad K(1) = 0, \tag{8}$$

$$S = \frac{1}{\gamma} BB^T = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & \frac{1}{\varepsilon^2} S_3 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{\gamma}.$$

Будем искать матрицу K в блочном виде

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & \varepsilon K_2 \\ \varepsilon K_2^T & \varepsilon K_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Тогда из уравнения (8) для блоков K_1, K_2, K_3 получаем систему матричных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= -K_1 A_1 - A_1^T K_1 - K_2 A_3 - A_3^T K_2^T + K_2 S_3 K_2^T - Q_1, \\ \varepsilon \dot{K}_2 &= -K_1 A_2 - K_2 A_4 - \varepsilon A_1^T K_2 - A_3^T K_3 + K_2 S_3 K_3, \\ \varepsilon \dot{K}_3 &= -2K_3 A_4 + S_3 K_3^2 + \varepsilon(-K_2^T A_2 - A_2^T K_2) - Q_3 \end{aligned} \tag{10}$$

с граничными условиями

$$K_1(1,\varepsilon) = 0, K_2(1,\varepsilon) = 0, K_3(1,\varepsilon) = 0.$$

У системы (10) существует интегральное многообразие медленных движений вида

$$\begin{aligned} K_2 &= h_2(K_1,\varepsilon) = h_{20}(K_1) + \varepsilon h_{21}(K_1) + \ldots \\ K_3 &= h_3(K_1,\varepsilon) = h_{30}(K_1) + \varepsilon h_{31}(K_1) + \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Матричные функции h_{2i}, h_{3i} определяются из уравнений, получаемых приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε в соотношениях, полученных формальной подстановкой h_i вместо K_i, $i = 2, 3$ в (10).
Так, при $\varepsilon = 0$ имеем

$$-K_1 A_2 - h_{20} A_4 - A_3^T h_{30} + h_{20} S_3 h_{30} = 0,$$

$$-2h_{30} A_4 + S_3 h_{30}^2 - Q_3 = 0.$$

В качестве h_{30} выберем положительное решение последнего уравнения

$$M = -R\gamma + \sqrt{R^2\gamma^2 + \beta_3}$$

Тогда выполняется неравенство $D_4 = A_4 - S_3 M = -\frac{1}{\gamma}\sqrt{R^2\gamma^2 + \beta_3} < 0$.

Для h_{20} получаем

$$h_{20} = K_1 M_1 + M_2,$$

где

$$M_1 = -A_2 D_4^{-1} = \frac{\gamma}{\sqrt{R^2\gamma^2+\beta_3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = -A_3^T M D_4^{-1} = \frac{\gamma}{\sqrt{R^2\gamma^2+\beta_3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} M.$$

Приравнивая коэффициенты при ε в первой степени, получаем следующие уравнения для h_{21} и h_{31}

$$\{\dot{K}_1\}_0(-A_2 D_4^{-1}) = -h_{21}A_4 - A_1^T h_{20} - A_3^T h_{31} + h_{20}S_3 h_{31} + h_{21}S_3 M, \tag{12}$$

$$0 = -h_{20}^T A_2 - A_2^T h_{20} - h_{31}A_4 - A_4^T h_{31} + h_{31}S_3 M + M S_3 h_{31}, \tag{13}$$

где

$$\{\dot{K}_1\}_0 = -K_1 A_1 - A_1^T K_1 - h_{20}A_3 - A_3^T h_{20}^T + h_{20}S_3 h_{20}^T - Q_1.$$

Уравнение (13) является линейным алгебраическим уравнением относительно h_{31}, следовательно

$$h_{31} = -\frac{1}{2D_4}(h_{20}^T A_2 + A_2^T h_{20}) = \frac{\gamma^2}{R^2\gamma^2+\beta_3}[(0\ \alpha_1)K_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} - M\alpha_1\alpha_2].$$

Тогда из (12) находим

$$h_{21} = -[\{\dot{K}_1\}_0(-A_2)D_4^{-1} + A_1^T h_{20} + A_3^T h_{31}]D_4^{-1}.$$

Если необходимо, то можно аналогичным путем вычислить и h_{22}, h_{32}, h_{23} и т. д. Система, описывающая движение на интегральном многообразии (11), имеет вид

$$\dot{K}_1 = -A_1^T K_1 - K_1 A_1 - h_2 A_3 - A_3^T h_2^T + h_2 S_3 h_2^T - Q_1. \tag{14}$$

Подставив в (14) вместо h_2 его приближенное значение, получим независимое дифференциальное матричное уравнение для K_1. В качестве граничного условия для уравнения (14), следуя [2], можно взять условие

$$K_1(1,\varepsilon) = \xi, \tag{15}$$

где

$$\xi = \varepsilon(M_2 N_0^{-1} M_2^T - L^T N^{-1} N_0^{-1} M_2^T - M_2 N_0^{-1} N^{-1} L - L^T M N_0^{-1} N^{-1} L) + O(\varepsilon^2),$$

$$N = \frac{1}{2}S_3 D_4^{-1} = \frac{-1}{2\sqrt{R^2\gamma^2+\beta_3}}, \ \ N_0 = M + N^{-1} = -R\gamma - \sqrt{R^2\gamma^2+\beta_3},$$

$$L = -D_4^{-1}(A_3 - S_3 M_2^T) = \frac{R\gamma^2}{R^2\gamma^2+\beta_3}(0\ \ -\alpha_2).$$

Такой выбор начального условия гарантирует, что квазиоптимальное управление вида

$$u = -\frac{1}{\gamma}(0\ 0\ 1/\varepsilon) \begin{pmatrix} K_1 & \varepsilon(h_{20}(K_1)+\varepsilon h_{21}(K_1)) \\ \varepsilon(h_{20}(K_1)+\varepsilon h_{21}(K_1))^T & \varepsilon(h_{30}(K_1)+\varepsilon h_{31}(K_1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\gamma}((h_{20}(K_1)+\varepsilon h_{21}(K_1))^T,\ h_{30}(K_1)+\varepsilon h_{31}(K_1)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где K_1 — решение уравнения (14) с начальным условием (15), будет давать погрешность порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале качества.

3. Литература

[1] Видилина, О.В. Задача оптимального управления для магнитоэлектрического силового привода / О.В. Видилина, Н.В. Воропаева // Сборник трудов “Информационные технологии и нанотехнологии” (ИТНТ). – Самара: Новая техника, 2018. - С. 2022-2029.
[2] Воропаева, Н.В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. - М.: Физматлит, 2009.
[3] Sobolev, V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems / V.A. Sobolev // Syst. & Control Lett. - 1984. - № 5. - P. 169-279.
[4] Shchepakina, E. Singular Perturbations: Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell // Springer Lecture Notes in Mathematics. – Cham: Springer International Publishing, 2014. - 225 p.
[5] Voropaeva, N.V. Decomposition of a linear-quadratic optimal control problem with fast and slow variables / N.V. Voropaeva, V.A. Sobolev // Automation and Remote Control. - 2006. - Vol. 67(8). - P. 1185-1193.
[6] Sobolev, V.A. Singular perturbations in linearly quadratic optimal control problems / V.A. Sobolev // Automation and Remote Control. - 1991. - Vol. 52(2). - P. 180-189.
[7] Vidilina, O.V. The construction of the observers for dynamic systems with fast and slow variables / O.V. Vidilina, N.V. Voropaeva // CEUR Workshop Proceedings. - 2016. - Vol. 1638. - P. 750-758. DOI: 10.18287/ 1613-0073-2016-1638-754-762.
[8] Osintsev, M.S. Dimensionality Reduction in Optimal Control and Estimation Problems for Systems of Solid Bodies with Low Dissipation / M.S. Osintsev, V.A. Sobolev // Automation and Remote Control. - 2013. - Vol.74(8). - P. 121-137.
[9] Mortell, M.P. Singular Perturbation and Hysteresis / M.P. Mortell, R. O’Malley, A. Pokrovskii, V. Sobolev. - Philadelphia: SIAM, 2005. - 358 p.
[10] Vidilina, O.V. Reduction of flexible joint manipulator mathematical model / O.V. Vidilina, N.V. Voropaeva // CEUR Workshop Proceedings. - 2017. - Vol. 1904. - P. 249-253.
[11] Brown, C.J. Time-optimal Control of a Moving-Coil Linear Actuator // C.J. Brown, J.T. Mo // IBM J. Res. Develop. - 1968. - P. 372-379.
[12] Novotny, D.W. Vector Control and Dynamics of AC Drivers / D.W. Novotny, T.A. Lipo. - New York: Oxford, 1996.
[13] Christiansen, B. Control of a Voice-Coil-Motor with Coulombic Friction / B. Christiansen, H. Maurer, O. Zim // Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008. - P. 1557-1562. DOI:10.1109/CDC.2008.4739025.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства высшего образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013–2020).

Reduction of the optimal control problem for a magnetoelectric power drive

O.V. Vidilina[1], N.V. Voropaeva[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. A linear-quadratic optimal control problem is considered for a singularly perturbed differential system, which describes the dynamics of a magnetoelectric actuator. Optimal control law is constructed as a feedback. Using the method of integral manifolds allows us to reduce the order of the matrix differential Riccati equation.