Разработка комбинированного алгоритма решения задач оптимального управления с ограничениями

А.И. Карамова[a], И.Л. Петров[a]

[a] *Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет", 453100, Стерлитамак, Россия*

Аннотация

В работе рассматриваются подходы к решению задач оптимального управления при наличии фазовых и терминальных ограничений. Предложен алгоритм решения на основе комбинации методов внешних штрафных функционалов, функционалов Лагранжа и метода Ньютона.

Ключевые слова: задача оптимального управления; метод штрафов; метод Ньютона; фазовые ограничения

1. Введение

Одним из важных и объемных разделов математического моделирования, в теоретическом и практическом смысле, являются моделирование управляемых систем. Он позволяет осветить довольно широкий круг реальных объектов и соответствующих им моделей управления. Появление задач такого типа вполне естественно при моделировании дискретных процессов, среди которых обработка и обмен информации электронными устройствами, задача распределения ресурсов и другие. При этом одним из важных понятий данной теории является оптимизация – целенаправленная деятельность на получение наиболее хороших результатов при имеющихся соответствующих условиях. Математические методы для поиска оптимального решения были заложены уже давно, но до недавнего времени не были особо востребованы, так как во многих областях исследований применялись редко, требовали большой вычислительной работы, реализовать которую было трудно, а в ряде случаем и невозможно. К настоящему времени разработаны множество и точных, и приближенных методов решения задачи оптимального управления.

Наиболее хорошие результаты оказываются при использовании методов, основанных на принципе оптимальности Беллмана и общих достаточных условиях оптимальности Кротова.

Для систем с дискретным временем список представлен не особо широко, что связано отсутствием в общем случае дискретного аналога принципа максимума Понтрягина для непрерывных систем.

Возможности методов, хорошо изученные теоретически, существенно различаются по критериям точности, надежности и эффективности. Метод внешних штрафных функционалов, несмотря на многие критические замечания, обладает рядом привлекательных теоретических свойств и может быть весьма полезен на начальных этапах расчетов. Методы модифицированных функционалов Лагранжа значительно более точные и могут расходиться при отсутствии хороших начальных приближений. Области сходимости ньютоновских методов еще меньше, однако, при хороших приближениях они позволяют получать высокоточные решения. Таким образом, естественно использовать комбинацию методов, совокупные свойства которой превышают возможности каждого из методов в отдельности.

В данной работе рассмотрены разные принципы и методы решения задачи оптимального управления.

2. Постановка задачи

Пусть уравнение объекта имеет вид:

$$x = f(x, u, t) \quad (1)$$

или в скалярном виде его можно представить как

$$x_i = f_i(x, u, t) \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – фазовый вектор, $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ – вектор управления. Также на фазовый вектор и вектор управления еще могут быть наложены ограничения в виде равенств или неравенств. При этом $u(t) \in U_t$ - ограничение на управление, а $x(t) \in X_t$ – фазовые ограничения. Для задачи еще вводится такой показатель, как критерий оптимальности, задаваемый функционалом $J = J(u(t), x(t))$. При этом ограничения могут быть представлены в общем виде $\big(u(t), x(t)\big) \in V_t, V_t \in R^{n+r}$. На уравнения траектории также могут быть наложены краевые ограничения, в общем виде представляемые $x(t_0) \in X_0, x(t_f) \in X_f$.

Из всего вышеперечисленного задачу оптимального управления (ЗОУ) можно сформулировать так: при заданных объектах управления, ограничениях и краевых условиях необходимо найти такое оптимальное управление $u^*(t)$ и оптимальную траекторию $x^*(t)$, при которых критерий оптимальности принимает минимальное (максимальное) значение. В большинстве случаев достаточно найти оптимальное управление.

3. Классификация задач и алгоритмов решения

Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа неравенств всегда являлись более трудоемкими и сложными для решения. Важным моментом при их решении является инерционность управляемой системы (индекс ограничения). При высокой инерционности оптимальная траектория содержит на временном интервале участки «предварительного подхода» к ограничению, на которых любые методы плохо сходятся. Кроме того, фазовые ограничения могут быть причиной большого числа «посторонних» локальных экстремумов, возникающих во вспомогательных экстремальных задачах.

Существует много классификаций задач оптимального управления по разным критериям [1].

Например, по виду ограничений различают:

- классического типа, для которых ограничения задаются как равенства, то есть

$$\varphi_k(x(t),\ u(t), t) = 0, \quad k = 1,2,\dots m. \tag{3}$$

К этому типу еще можно отнести задачи с изопериметрическими ограничениями вида

$$\int_{t_0}^{t_j} g_{n+j}(x(t),u(t),t)dt = b_j,\ j = 1,2,\dots,m.. \tag{4}$$

- неклассического типа, для которых ограничения задаются в виде неравенств:

$$\varphi_k(x(t),\ u(t), t) \le 0, \quad k = 1,2,\dots m. \tag{5}$$

По аналогии с классическими задачами для неклассических можно ввести ограничения вида:

$$\int_{t_0}^{t_j} g_{n+j}(x(t),u(t),t)dt \le b_j,\ j = 1,2,\dots,m.. \tag{6}$$

Задачи оптимального управления по виду краевых условий делятся на следующие группы:

- с закрепленными (фиксированными) концами, для которых верно следующее: $x(t_0) = x^0, x(t_j) = x^m$, где $x^0, x^m -$ заданные точки.
- с подвижным правым концом, то есть x^m - более одной точки; с подвижным левым концом x^0 - состоит более, чем из одной точки; с подвижными обоими концами.
- на правый конец не наложены никаких ограничений.

Классификация по времени начала и окончания:

- с фиксированным временем, если начальный и конечный момент времени фиксированы.
- если один из моментов времени не фиксирован, то с нефиксированным временем.

Также по критерию оптимальности различают:

- задача Больца, для которой критерий оптимальности имеет вид:

$$J = g_0(x(t_0), x(t_m), t_0, t_m) + \int_{t_0}^{t_m} f_0(x(t),u(t),t)dt.. \tag{7}$$

- задача Лагранжа, для которой критерий имеет вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_m} f_0(x(t),u(t),t)dt.. \tag{8}$$

- задача Майера, при которой критерий имеет вид:

$$J = g_0(x(t_0), x(t_m), t_0, t_m). \tag{9}$$

В зависимости от своей постановки, любая из задач оптимизации может решаться разными способами, и наоборот - любой метод может применяться для решения многих задач.

Первые способы решения задач оптимального управления были методами градиента в функциональном пространстве и применялись к простейшим задачам, в которых нет ни ограничений управления, ни каких-либо дополнительных условий, кроме краевых[1]. В данном случае вычисляется градиент функционала и, меняя шаг спуска, ищется решение скалярной задачи минимизации функционала. Данный подход довольно неплохой и такие методы, как, например, метод «штрафных функционалов» может быть универсальным для решения задач. Теоретически этот метод решает все вопросы, но на практике появляются серьезные трудности, как, например, грубый результат, медленная сходимость. Метод «штрафных функционалов» применяется для решений задач оптимального управления в общей постановке: и при наличии ограничений-равенств, и при наличии ограничений-неравенств. В методе штрафные функции выбираются так, чтобы их значения равнялись нулю внутри и на границе допустимой области G, а вне ее – были положительны и возрастали тем больше, чем сильнее нарушаются ограничения. Так штрафуется отдаление от допустимой области. Таким образом, в общем случае штрафная функция задается следующим образом:

$$\Phi(x,a) = \begin{cases} 0,\ \text{если}\ x \in G \cup dG, \\ \to \infty,\ \text{если}\ x \notin G \cup dG, a \to \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Как правило, в качестве внешней штрафной функции используют:

$$\Phi(x,a) = \frac{a}{2}\left(\sum_{i=1}^{I}\left(\left(\varphi_i(x)\right)\right)^2 + \sum_{j=1}^{J}\left(\max\left(\left(0, g_j(x)\right)\right)^2\right)\right). \tag{11}$$

где

$$\max\left(0, g_j(x)\right) = \begin{cases} 0, \text{ } если\ g_j(x) \le 0, \\ g_j(x), \text{ } если\ g_j(x) > 0. \end{cases}$$

Вспомогательная функция при этом принимает вид:

$$\mathrm{F(x,a) = f(x) + \Phi(x,a)} \tag{12}$$

Начальная точка обычно задается вне множества допустимых решений. На каждой итерации ищется точка безусловного минимума вспомогательной функции по x при заданном параметре м помощью какого-либо метода безусловной оптимизации. Полученная точка используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при возрастающем значении штрафа. При неограниченном росте параметра последовательность сходится к точке условного минимума.

Алгоритм выполнения действий метода «штрафных функций» представлен на рис. 1.

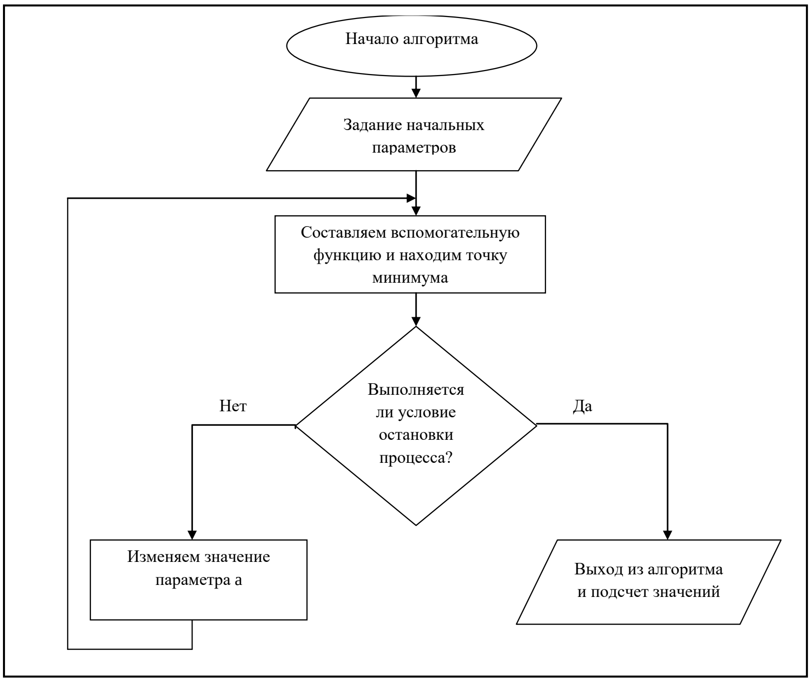

Рис. 1. Блок-схема алгоритма метода «штрафных функций».

Развитие численных методов дало возможность учесть как ограничения на управление, так дополнительные условия (как пример, имели форму условий на правом конце траектории). Предметом исследований также стали ограничения в фазовом пространстве и ограничения общего вида. Именно эти вопросы дали толчок к развитию методов вариации в фазовом пространстве. Они настолько хорошо справлялись с ограничениями в фазовом пространстве, что остальными недочетами методом можно было условно пренебречь [2].

Например, метод вариации в пространстве управлений. Метод носит итерационный характер. Каждая итерация является переходом от некоторой кривой к близкой к ней, лучшей по величине минимизирующего функционала. Алгоритм выполнения действий метода вариаций представлен на рис. 2.

При решении также используется метод модифицированной функции Лагранжа, алгоритм работы которого представлен на рис. 3.

Способы решения задач оптимального управления не ограничиваются перечисленными. Каждый из методов имеет свои преимущества и недостатки по отношению к другим.

4. Описание алгоритма решения

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} &J = \int_{t_0}^{T} f_0(t, x(t), u(t))dt \to \inf, \\ &\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \\ &x(t_0) = \overline{x^0},\ u(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T],\ x(T) = \overline{x^T}. \end{aligned} \tag{13}$$

Краевая задача принципа максимума будет отличаться отсутствием условия трансверсальности, заменяемые на граничные условия

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), \overline{u}(t)), \\ &\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(t, x(t), \overline{u}(t), \lambda_0, p(t))}{\partial x}, \\ &x(t_0) = \overline{x^0},\ x(T) = \overline{x^T}. \end{aligned} \qquad (14)$$

где $\overline{u}(t) = \arg\max\{-\lambda_0 f_0(t, \overline{x}(t), u) + \langle p(t), f(t, \overline{x}(t), u)\rangle\}, t \in [t_0, T]$.

Строим дискретную задачу оптимизации:

$$x^{i+1} = x^i + \Delta t f^i(t^i, x^i, \overline{u}^i),$$

$$p^{i+1} = p^i + \lambda_0 \frac{\partial f_0(t^i, x^i, \overline{u^i})}{dx} \Delta t + \left|\frac{\partial f_0(t^i, x^i, \overline{u^i})}{dx}\right|^T p^i \Delta t, \qquad (15)$$

$$x^0 = \overline{x}^0;\ x^1 = \overline{x}^1.$$

где $\mathbf{\overline{u}(t) = \arg\max\{-\lambda_0 f_0^i(t^i, x^i, u^i) + \langle p^i, f^i(t^i, x^i, u^i)\rangle\} = \psi_i(t^i, x^i, u^i)}$,

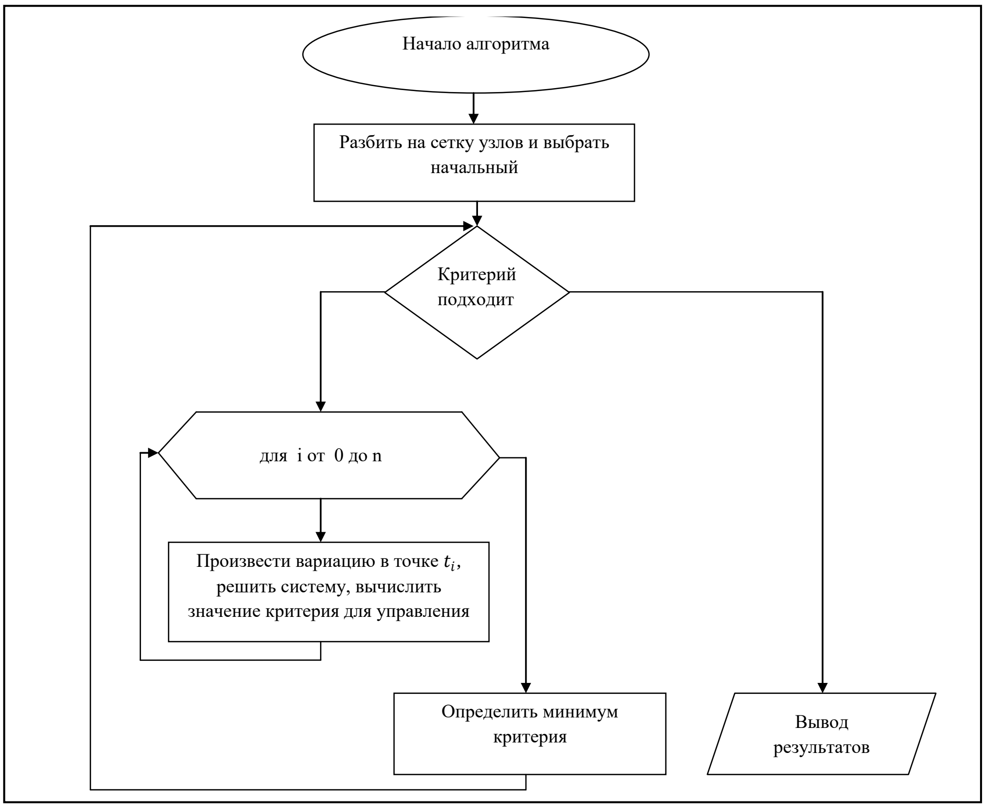

Рис. 2. Блок-схема алгоритма метода вариаций.

Опишем алгоритм комбинированный алгоритм решения ЗОУ на основе метода Ньютона:

1. Задать начальное приближение вектора s.
2. Полагаем $x^0 = \overline{x}^0$ и $p^0 = s$.
3. Для каждого i=0,1,…,q-1:
   a) вычисляем управление по формулам, полученным из условия максимума $u^{i(0)}(s^{(0)}) = \arg\max\{-\lambda_0 f_0(t, x^{i(0)}, u) + \langle p^i(s^{(0)}), f^i(t, x^{i(0)}(s^{(0)}), u^i)\rangle\}$
   b) вычисляем соответствующий этому управлению фазовый вектор, используя (15)
   c) вычисляем сопряженный вектор
4. Вычисляем вектор отклонений
   $$\phi(s^{(0)}) = x^{q(0)}(s^{(0)}) - \overline{x}_1^1 = (x_1^{q(0)}(s^{(0)}) - -\overline{x}^1, \dots, x_n^{q(0)}(s^{(0)}) - \overline{x}_n^1) \qquad (16)$$
5. Полагаем j=1.
6. Строим вектор $s^{(0,j)}$ из вектора $s^{(0,j)}$ заменой j-й координаты на $s_j^{(0)} + \Delta s_j^{(0)}$.
7. Полагаем $x^{0(1)} = \overline{x}^0$ и $p^0 = s^{(0,j)}$.
8. Для каждого i=0,1,…,q-1:
   a) вычисляем управление по формулам, полученным из условия максимума $u^{i(1)}(s^{(0,j)}) = \arg\max\{-\lambda_0 f_0(t, x^{i(1)}, u) + \langle p^i(s^{(0,j)}), f^i(t, x^{i(1)}(s^{(0,j)}), u^i)\rangle\}$
   b) вычисляем соответствующий этому управлению фазовый вектор из уравнений (15)
9. Вычисляем вектор отклонений по аналогии с пунктом 4.
10. Вычисляем j-й столбец матрицы $\frac{\Delta\phi((s^{(0)}))}{\Delta s}$.
11. Увеличиваем j на 1 и если $j \le n$, то идем к пункту 6 иначе к 12.

12. Находим $\left(\frac{\Delta\phi((s^{(0)}))}{\Delta s}\right)^{-1}$
13. Строим очередное приближение вектора s.
14. Проверяем, достигнута ли заданная точность вычислений. Если достигнута, то идем к пункту 16, иначе к 15.
15. Полагаем $s^{(0)} = s^{(1)}$ идем к пункту 2.
16. Вычисляем значение целевой функции по формуле:

$$J^{(0)} = J[x^{(0)}, u^{(0)}] = \sum_{i=0}^{q-1} f_0^i (x^{i(0)}, u^{i(0)}) \Delta t. \qquad (17)$$

Построим блок-схему метода (рис. 4).

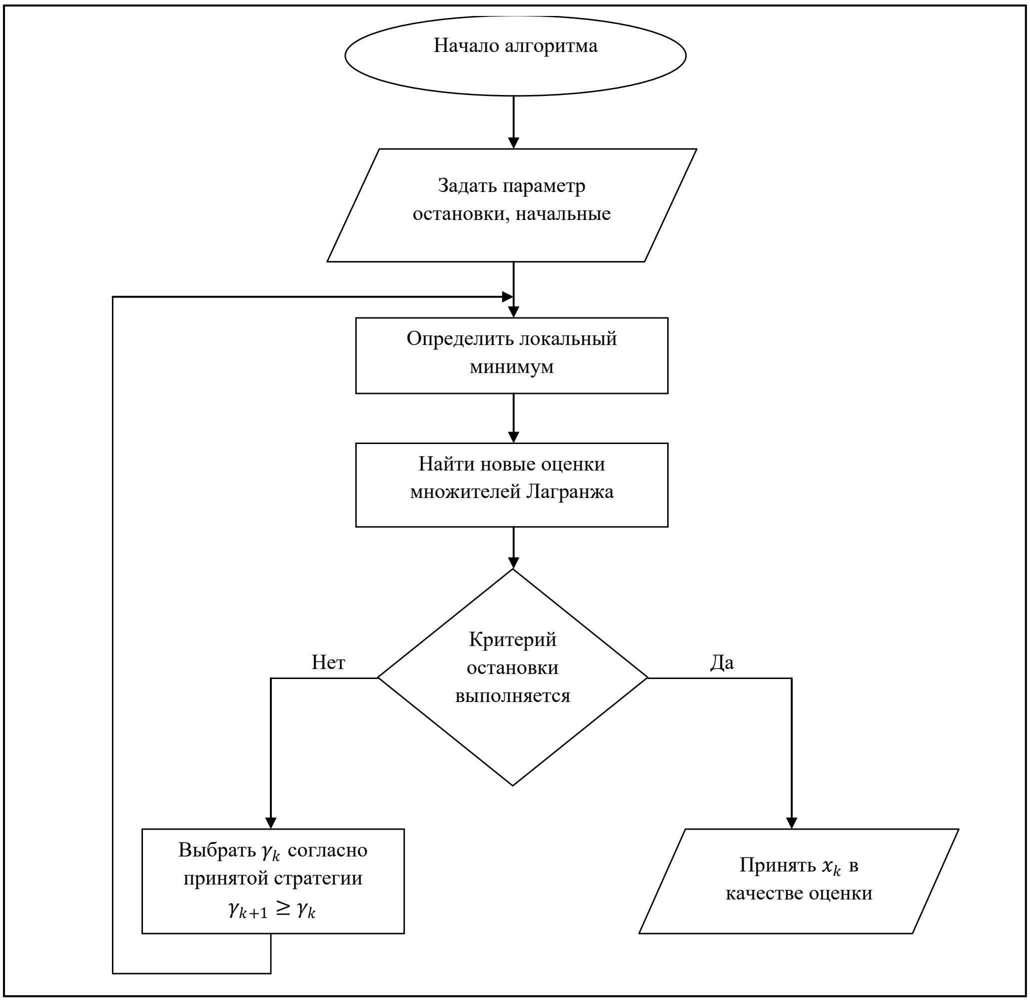

Рис. 3. Блок-схема алгоритма метода вариаций.

Для решения приведенных ЗОУ разработана программа в среде Borland Delphi. Программа состоит из трех крупных блоков, пересекающихся и дополняющих друг друга. Первый блок – это ввод исходных данных и анализ введенных выражений. Так как заранее неизвестна структура введенных уравнения траектории и ограничения на управление то необходим анализатор. Этот процесс реализован с применением регулярных выражений [3]. Вторая часть программы – решение задачи оптимального управления. При решении задачи оптимального управления используется метод пристрелки, первый «выстрел» которого делается при помощи метода Рунге-Кутты. Третий блок отвечает за представление результатов пользователю. Формы работы с программой представлены на рис. 5.

5. Заключение

В данной работе представлены методы решения ЗОУ, комбинированный алгоритм на основе метода Ньютона и на основе изложенного метода разработана программа для решения ЗОУ. Достоинствами данной программы является то, что структуру задачи можно задавать в ходе ее работы. Анализатор введенных выражений проведет обработку данных и вычислит необходимые показатели. Простота интерфейса не требует дополнительных знаний для работы с ней. Все вычисления скрыты от пользователя, что требует от него только ввод данных и сохранение результата. Из минусов программы можно отметить увеличение времени работы с усложнением структуры задачи, сложная структура решения задачи.

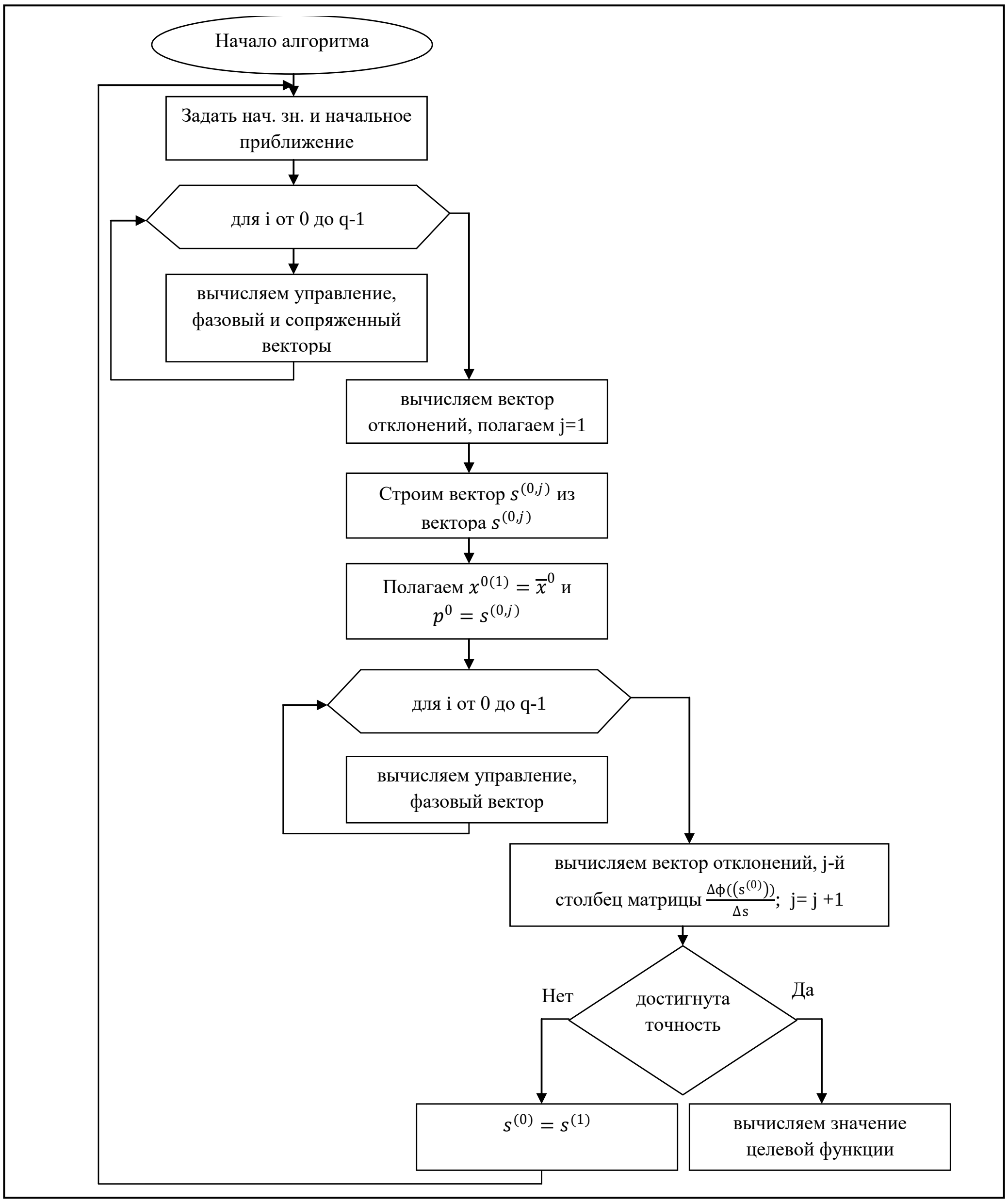

Рис. 4. Блок-схема комбинированного алгоритма Ньютона.

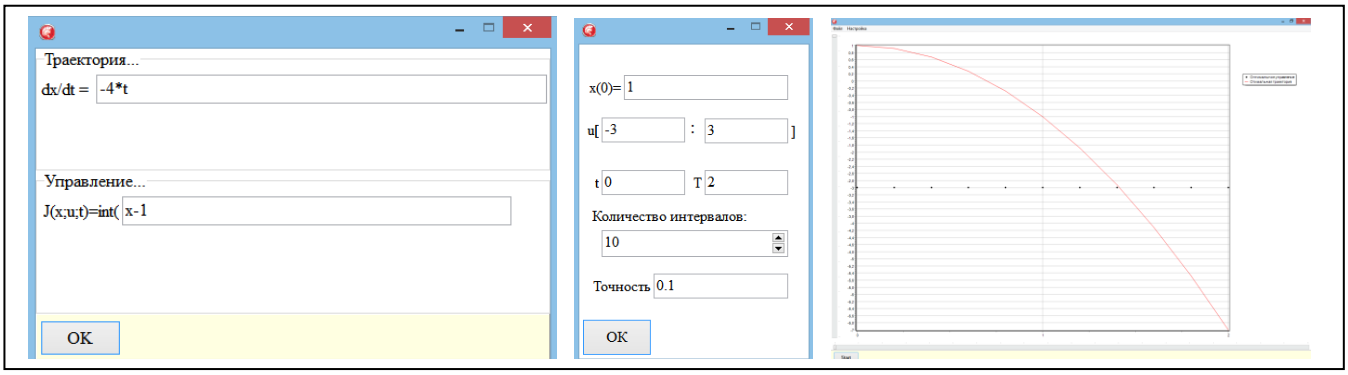

Рис. 5. Формы работы программы: внесение структуры задачи, установки входных значений, вывод результатов.

Литература

[1] Мустафина, С.А. Вариационное исчисление и оптимальное управление в примерах и задачах / С.А. Мустафина, А.И. Карамова. – Стерлитамак: СФ БашГУ, 2013. – 92 с.

[2] Delphi XE Работа с регулярными выражениями [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.webdelphi.ru/2010/09/delphi-xe-rabota-s-regulyarnymi-vyrazheniyami/ (01.02.2017).

[3] Алибеков, И.Ю. Численные методы / И.Ю. Алибеков. - М.: МГИУ, 2008. - 220 с.