Равноугольные жесткие фреймы в цифровой обработке разреженных сигналов

С.Я. Новиков[1], М.Е. Федина[1]
[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Сжатое зондирование – новый способ сжатия информации. При его реализации важную роль играет свойство ограниченной изометрии прямоугольной матрицы. С другой стороны, прямоугольные матрицы являются матрицами операторов синтеза для фреймов. Показаны экстремальные свойства равноугольных жестких фреймов в этом круге вопросов.

1. Введение

Традиционные методы обработки больших массивов данных предполагают три основных этапа: сбор, сжатие, восстановление информации. Наличие первого этапа требует создания больших хранилищ.

Метод сжатого зондирования предполагает выделять наиболее значимые данные измерений, игнорируя остальные, т.е. совместить первые два этапа обработки данных в один.

2. Описание метода

Пусть $x-$ неизвестный N-мерный вектор, имеющий не более K ненулевых координат, так называемый K-*разреженный* вектор. Сжатое зондирование нацелено на построение относительно небольшого количества измерений M, но так, чтобы можно было построить конструктивный алгоритм для восстановления вектора x.

Модель сжатого зондирования представляется $M \times N$-матрицей Φ, строки которой – измерения, а результат измерений – вектор

$$y = \Phi x + z, \tag{1}$$

в котором присутствует шум z, причем $M \ll N$.

Важным свойством матрицы Φ в этом круге вопросов является так называемое $RIP-$ свойство (restricted isometry property), или свойство ограниченной изометрии.

Определение [1]. Матрица Φ обладает $(K, \delta)-$ *ограниченной изометрией*, если

$$(1-\delta)\|x\|^2 \le \|\Phi x\|^2 \le (1+\delta)\|x\|^2$$

для любого K-разреженного вектора x. Наименьшее возможное δ в этих неравенствах называется *константой ограниченной изометрии* матрицы Φ и обозначается $\delta_K(\Phi)$.

В работе [2] доказана

Теорема. *Пусть* $M \times N$*-матрица* Φ $(2K, \delta)-$ *ограниченно изометрична с* $\delta < \sqrt{2} - 1$, *и пусть вектор* $x \in \mathbb{R}^N$ *является* K*-разреженным.*

Если $\widetilde{x} := arg \quad min \|\widehat{x}\|_1$, *где* $\|y - \Phi\widehat{x}\| \le \varepsilon$, *то существует* $C = C(\delta) > 0$ *такое, что* $\|\widehat{x} - x\| \le C\varepsilon$.

Пусть Φ – $M \times N$-матрица.

Лемма [3]. *Константа ограниченной изометрии*

$$\delta_K(\Phi) = \max_{\mathfrak{K}\subseteq\{1,...,N\},|\mathfrak{K}|=K} \|\Phi_{\mathfrak{K}}^*\Phi_{\mathfrak{K}} - I_{\mathfrak{K}}\|_2 ,$$

где $\Phi_{\mathfrak{K}}$ обозначает подматрицу, состоящую из столбцов Φ с индексами из множества $\mathfrak{K}$.

Теорема (Гершгорин [4]). *Для каждого собственного значения λ $K \times K$-матрицы A найдется индекс $i \in \{1, 2, ..., K\}$, такой что*

$$|\lambda - A[i,j]| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{K} |A[i,j]| .$$

Рассмотрим матрицу Φ, все столбцы которой имеют единичную норму. Заметим, что $\Phi_{\mathfrak{K}}^*\Phi_{\mathfrak{K}}$ является матрицей Грама для столбцов с индексами из $\mathfrak{K}$. Ее диагональные элементы равны 1, внедиагональные – скалярные произведения различных столбцов из Φ.

Пусть μ обозначает максимальную некорегентность векторов:

$$\mu := \max_{i,j\in\{1,...,N\},i\neq j} |\langle\phi_i,\phi_j\rangle| .$$

Модуль каждого внедиагонального элемента матрицы $\Phi_{\mathfrak{K}}^*\Phi_{\mathfrak{K}}$ не превосходит μ, независимо от выбора $\mathfrak{K}$. Поэтому для каждого собственного значения λ матрицы $\Phi_{\mathfrak{K}}^*\Phi_{\mathfrak{K}} - I_k$ из теоремы Гершгорина следует:

$$|\lambda| = |\lambda - 0| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{K} \leq |\langle\phi_i,\phi_j\rangle| \leq (K-1)\mu. \tag{2}$$

Так как (2) выполняется для каждого собственного значения λ матрицы $\Phi_{\mathfrak{K}}^*\Phi_{\mathfrak{K}} - I_k$ и для каждого $\mathfrak{K} \subseteq \{1, ..., N\}$ получаем, что $\delta_K \leq (K-1)\mu$, то есть Φ оказывается $(K, (K-1)\mu)$ – ограниченно изометрична.

Фреймом гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ называется последовательность $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, удовлетворяющая неравенствам

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x,\varphi_i\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad x \in \mathfrak{H},$$

числа $0 < A \leq B < \infty$ называются фреймовыми границами.

Фрейм называется **жестким**, если $A = B$ [5]. Жесткие фреймы – удобный инструмент восстановления сигнала x по измерениям $\langle x,\varphi_i\rangle$, $i \in I : x = \frac{1}{A}\sum\limits_{i\in I}\langle x,\varphi_i\rangle\varphi_i$.

В конечномерном пространстве $\mathfrak{H} = \mathcal{C}^M$ фрейм задается столбцами $M \times N$-матрицы полного ранга

$$\Phi = [\varphi_1, ..., \varphi_N] , \quad c \quad N \geq M.$$

Экстремальные собственные значения матрицы $\Phi\Phi^*$ являются фреймовыми границами. Жесткий фрейм имеет одинаковые фреймовые границы. Фрейм Φ является жестким, если строки матрицы Φ имеют одинаковые нормы и ортогональны. Жесткие фреймы позволяют провести линейное преобразование (кодировку) $y = \Phi^*x$ сигнала x, и восстановить сигнал эффективным способом $x = \frac{1}{A}\Phi y$, где $A-$ квадрат нормы строк матрицы Φ.

Различные прикладные задачи потребовали для своего решения жестких фреймов с дополнительным требованием нормировки векторов – столбцов матрицы Φ, а именно, равенства этих норм единице [6]. Простейшим примером нормированного жесткого фрейма является матрица, составленная из строк матрицы дискретного преобразования Фурье и последующей нормировки столбцов. Рассмотрим $M \times N$-матрицу $\Phi = [\varphi_1, ..., \varphi_N]$, столбцы которой нормированы: $\|\varphi_i\| = 1, \quad i = \overline{1, N}$.

Нормой Гильберта–Шмидта матрицы Грама для семейства векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ называется

$$\|\Phi^*\Phi\|_{HS}^2 := \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} |\langle \varphi_n, \varphi_{n'} \rangle|^2 .$$

В некоторых статьях [7] это число называют *фреймовым потенциалом.* Так как столбцы матрицы Φ нормированы, и матрица $\Phi^*\Phi$ не может иметь более M ненулевых собственных значений, получаем

$$N^2 = (Tr\,(\Phi^*\Phi))^2 = \left(\sum_{M}^{m=1} \lambda_m\,(\Phi^*\Phi) \right)^2 \leq M \left(\sum_{M}^{m=1} \lambda_m\,(\Phi^*\Phi) \right)^2 = M\,\|\Phi^*\Phi\|_{HS}^2 .$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда M наибольших собственных значений матрицы $\Phi^*\Phi$ равны между собой. Так как эти же числа являются собственными значениями матрицы $\Phi^*\Phi$, то получаем, что $\Phi^*\Phi$ имеет вид $A \cdot Id$, то есть Φ оказывается жестким фреймом.

Таким образом фреймовый потенциал Φ удовлетворяет неравенству $\|\Phi^*\Phi\|_{HS} \geq \frac{N^2}{M}$, равенство достигается тогда и только тогда, когда $\Phi-$ нормированный жесткий фрейм.

Для $M \times N$-матрицы $\Phi = [\varphi_1, ..., \varphi_N]$ положим

$$\mu := \max_{n, n' \in \{1, ..., N\}, n \neq n'} \left| \langle \phi_n, \phi_n' \rangle \right| .$$

Предполагая столбцы Φ нормированными, имеем

$$\frac{N^2}{M} \leq \|\Phi^*\Phi\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} \left| \langle \phi_n, \phi_n' \rangle \right|^2 \leq N + N\,(N-1)\,\mu^2.$$

Как и выше, равенство в первом неравенстве достигается на нормированных жестких фреймах. Равенство во втором неравенстве достигается на *равноугольных жестких фреймах.* Так называются нормированные жесткие фреймы, удовлетворяющие дополнительному условию: $|\langle \phi_n, \phi_n' \rangle| = const$ для любых пар $n \neq n'$.

Теорема [7]. *Каждая $M \times N-$ матрица Φ с нормированными столбцами удовлетворяет неравенству*

$$\mu \geq \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}}.$$

Равенство достигается на равноугольных жестких фреймах, и только на них.

3. Заключение

Равноугольные жесткие фреймы нашли применение в теории связи [7], доказано, что линейное кодирование, осуществленное равноугольным жестким фреймом, обладает дополнительной устойчивостью относительно потерь в каналах связи.

4. Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00138.

5. Литература

[1] Candès, E.J. Near–optimal signalrecovery from random projections / E.J. Candès, T. Tao // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2004. — Vol. 52(12). — P. 5406–5425.

[2] Candès, E.J. The restricted isometry property / E.J. Candès // C.R. Acad. Sci. Paris. — 2008. — Ser. I. Vol. 346(9–10). — P. 589–592.

[3] Mixon, D.G. Sparse Signal Processing with Frame Theory. [Electronic resource]. — Access mode: http://arxiv.org/abs/1204.5958

[4] Gershgorin, S. Über die Abgrenzung der Eigenwerte liner Matrix / S. Gershgorin // Изв. АНСССР, физ.–мат. серия. — 1931. — Т. 7, №6. — С. 749–754.

[5] Новиков, С.Я. Фреймы конечномерных пространств: учебное пособие / С.Я. Новиков, М.А. Лихобабенко.— Самара: Издательство Самарский университет, 2013. — 52 с.

[6] Benedetto, J.J. Finite Normalized tight frames / J.J. Benedetto, M. Fickus // Adv. Comput. Math.. — 2003.— Vol. 18. I. 2–4. — P. 357–385.

[7] Stromer, T. Grassmanian frames with applications / T. Stromer, R.W. Heath // Appl. Comput. Harmon Anal. — 2003. — Vol. 14. I. 3. — P. 257–275.

Equiangular tight frames in sparse signal processing

S.Ya. Novikov[1]**, M.E. Fedina**[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. Compressed sensing is a new way of data compression. When it is realized, an important role is played by the property of a restricted isometry of a rectangular matrix. On the other hand, rectangular matrices are matrices of synthesis operators for frames. Extremal properties of equiangular tight frames in this circle of questions are shown.

Keywords: Steiner equiangular tight frames, sparse signal processing, fingerprints.