РАСШИРЕННОЕ УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ В КВАРЦЕВЫХ ВОЛОКНАХ

И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Найдено в квадратурах решение уравнения распространения оптических импульсов в волоконных световодах. Выведено расширенное уравнение распространения оптических импульсов в кварцевых волоконных световодах. Найдено его локализованное решение. Показано, что решение расширенного уравнения распространения оптических импульсов в кварцевых волоконных световодах имеет свойство непертурбативности. Доказана теорема о сингулярности решения по параметру нелинейности. Показано,что солитоны имеют разные скорости.

Ключевые слова: волоконный световод, кварцевый волоконный световод, уравнение распространения, решение в квадратурах, расширенное уравнение распространения, оптический импульс, солитонное решение, керровская нелинейность, сингулярность решения.

Введение

Поле оптического импульса, распространяющегося в одномодовом волоконном световоде, поддерживающем состояние линейной поляризации, имеет вид [1]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_x F(x,y) A(z,t) \exp\{i(\beta_o z - \omega_o t)\}, \qquad (1)$$

где $F(x,y)$ - обычно гауссовская функция вида $\exp\{-(x^2+y^2)/w^2\}$ с характерным размером моды w, $A(z,t)$ - комплексная огибающая импульса, ω_o - несущая частота, β_o - центральное волновое число. Огибающая $A(z,t)$ является медленно изменяющейся функцией своих аргументов, что означает малость её относительных изменений на интервалах времени порядка $1/\omega_o$ и расстояниях порядка $1/\beta_o$. Для $A(z,t)$ выведено уравнение распространения [1], [2]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i(\Delta\beta)A. \qquad (2)$$

Правая часть этого уравнения описывает оптические потери и нелинейные эффекты посредством функции $\Delta\beta(|A|^2)$, которая выражается через нелинейную часть показателя преломления Δn с помощью формулы

$$\Delta\beta = \left(k_o \iint \Delta n |F(x,y)|^2 dxdy\right) \Big/ \left(\iint |F(x,y)|^2 dxdy\right), \qquad (3)$$

где $k_o = \omega_o / c$. Коэффициенты в (2): $\beta_1 = 1/v_g$ - величина обратная групповой скорости, а β_2 - дисперсия групповой скорости. В области прозрачности волновода $\Delta\beta$ является вещественной функцией от $|A|^2$. Уравнение (2) справедливо для импульсов длительностью $> 0{,}1nc$, что соответствует квазимонохроматическому приближению.

Вывод расширенного уравнения распространения

Для кварца нелинейность имеет керровский тип $\Delta n = n_2|E|^2$ и из (2) и (3) следует уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma|A|^2 A, \qquad (4)$$

где γ – коэффициент нелинейности.

Для одномодовых кварцевых волокон все приведённые выше параметры известны и их численные значения приведены в [1], [2], [3]. Решение уравнения (4) в лабораторной системе отсчёта с исходными параметрами имеет вид [8]

$$A = \left(E_o \exp\left\{i\, z\gamma E_o^2/2\right\}\right) \Bigg/ \left(ch\left[\frac{E_o\sqrt{\gamma}(z - z_o - v_g t)}{v_g\sqrt{|\beta_2|}}\right]\right). \qquad (5)$$

Выражение (5) ущербно в том плане, что распределение импульсов по скоростям имеет вид Дельта-функции, а также, что эта фиксированная для всех импульсов скорость не зависит от пикового значения напряженности импульса. Ожидаемо, что чем больше пиковое значение напряжённости, тем больше величина скорости. Непонятно и отсутствие волнового числа β_o.

Понимая серьёзность высказанных выше критических замечаний, приведём вывод расширенного уравнения распространения и его развёрнутое решение.

Исходным пунктом служит уравнение для напряжённости поля в спектральном представлении [1]

$$\nabla^2 \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_o) + \varepsilon(\omega) k_o^2 \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_o) = 0, \qquad (6)$$

где $\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_o) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(\vec{r}, t)\exp\{i[\omega - \omega_o]t\}dt$, а $\varepsilon(\omega)$ - диэлектрическая проницаемость, представимая в виде

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^2 \cong n^2 + 2n\Delta n.$$

Уравнение (6) решается стандартным методом разделения переменных:

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_o) = F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_o)\exp\{i\beta_o z\}. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и обозначая постоянную разделения как $\overline{\beta}^2$, получим два уравнения:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\varepsilon(\omega)k_o^2 - \overline{\beta}^2\right]F = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} + 2i\beta_o\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\overline{\beta}^2 - \beta_o^2\right)\tilde{A} = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (8) определяет распределение поля моды $F(x, y)$ и поправку $\Delta\beta$ к постоянной распространения $\beta(\omega)$ в линейном приближении $\overline{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta$, о которых говорилось выше.

Нашей дальнейшей задачей является рассмотрение уравнения (9). Мы не станем следовать указанию [1], [2], [3] пренебречь второй производной в (9) в силу предположения о медленной изменяемости функции $\tilde{A}(z, \omega - \omega_o)$, а получим решение полного уравнения, следующего из (9), и все сравнительные оценки проведём в полученном уравнении. Начнём с множителя при последнем слагаемом:

$(\overline{\beta}^2 - \beta_o^2) = (\overline{\beta} - \beta_o)(\overline{\beta} + \beta_o) = (\beta + \Delta\beta - \beta_o)(\beta + \Delta\beta + \beta_o)$. Разложим функцию $\beta(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности точки ω_o: $\beta(\omega) = \beta_o + \beta_1(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_o)^2 + \ldots$, где степенями выше второй пренебрегаем, что соответствует квазимонохроматическому приближению. Подставляя это разложение в предыдущее выражение и обозначая $\omega - \omega_o = \Delta\omega$, имеем:

$$
\begin{aligned}
(\overline{\beta}^2 - \beta_o^2) &= \left(\beta_1\Delta\omega + 0{,}5\beta_2(\Delta\omega)^2 + \Delta\beta\right) \times \\
&\times \left(2\beta_o + \beta_1\Delta\omega + 0{,}5\beta_2(\Delta\omega)^2 + \Delta\beta\right) \cong \\
&\cong \left(\beta_1\Delta\omega + 0{,}5\beta_2(\Delta\omega)^2 + \Delta\beta\right) 2\beta_o.
\end{aligned}
$$

Подстановка этого выражения в (9) даёт

$$
\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} + 2i\beta_o \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + 2\beta_o\left(\beta_1\Delta\omega + \frac{1}{2}\beta_2(\Delta\omega)^2 + \Delta\beta\right)\tilde{A} = 0 .
$$

Обратное фурье-преобразование приводит с учётом (3) к следующему уравнению для огибающей $A(z, t)$:

$$
i\left(\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t}\right) + \frac{1}{2\beta_o}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma|A|^2 A = 0 . \qquad (10)
$$

Так как в области прозрачности кварца ($\lambda \approx 1{,}55$ мкм) величина $\beta_2 = -20$ пс^2/км, то (10) является уравнением эллиптического типа. Представляет интерес нахождение его решения и исследование различных предельных случаев.

Свойства расширенного уравнения импульсов в кварцевых волокнах

Отметим, что обычно [1], [3], [4] для кварцевых волокон применяют уравнение, получающееся из (10) отбрасыванием второй производной по координате. Следует заметить, что отбрасывание второй производной по координате происходит ещё на начальном этапе решения волнового уравнения в спектральном представлении [1], [3]. Это сделано в предположении, что фурье-образ огибающей является медленно меняющейся функцией. Выше был проведён полный вывод уравнения (10), в котором уже можно провести сравнительную оценку вклада вторых производных. Так как для кварца в области минимальных оптических потерь: $\lambda \approx 1{,}55$ мкм; $\beta_2 = -20$ (пс)^2/км; $n = 1{,}45$

то полагая $z = ct_1$ получим, что коэффициенты при вторых производных различаются на два порядка не в пользу второй производной по времени t.

Таким образом, для кварцевых волноводов пригодно приближённое уравнение

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}\right)+\frac{1}{2\beta_o}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+\gamma|A|^2 A=0, \qquad (11)$$

а не уравнение

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}\right)-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+\gamma|A|^2 A=0\,. \qquad (12)$$

Солитонное решение уравнения (12) в лабораторной системе отсчёта имеет вид (5), где b-свободный параметр, являющийся поправкой к центральному волновому числу, z_o- координата импульса в начальный момент времени.

Далее покажем, что солитоны уравнения (10) имеют разные скорости, исследуем свойства более общего уравнения (10). Покажем также, что решения (10) имеют сингулярность по параметру нелинейности и, следовательно, расширенное уравнение распространения (10) имеет свойство непертурбативности. Теория возмущений применяется, например, [4], [7] при исследовании вопросов устойчивости или эффектов, связанных с поглощением. Более сложные выкладки приводят к тому же результату и для некерровской нелинейности, которая часто рассматривается в рамках теории возмущений.

С целью удобства перейдём от уравнения для комплексной огибающей (10) к уравнению для оптической интенсивности $I = |A|^2/2$ с помощью подстановки

$$A(z,t)=\sqrt{2I}\,\exp\{i\,bz\}, \qquad (13)$$

где b – произвольный параметр, являющийся поправкой к центральному волновому числу β_o.

Подстановка (13) в (10) приводит после отделения вещественной и мнимой частей полученного уравнения к следующим двум уравнениям для оптической интенсивности огибающей:

$$(1+b/\beta_o)(\partial I/\partial z)+(1/v_g)(\partial I/\partial t)=0\,, \qquad (14)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\beta_o}\left[2I\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^2\right]-\beta_2\left[2I\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)^2\right]=\\&=\left[b+\frac{b^2}{2\beta_o}-\gamma I\right]8I^2.\end{aligned} \qquad (15)$$

Уравнение (14) является линейным и однородным, что позволяет написать его общее решение, являющееся произвольной дифференцируемой функцией $I = I(s(z,t))$, где

$$s(z,t) = z - z_o - vt\,, \tag{16}$$

$$v = v_g(1 + b/\beta_o)\,. \tag{17}$$

Таким образом, автомодулируемый импульс представляет собой бегущую волну неизменного профиля. Скорость этой волны определяется формулой (17) и в силу произвольности параметра b не является одной и той же для всех импульсов, в отличии от решения (5), общепринятого в нелинейной волоконной оптике уравнения (12) (хорошо известно [5],[6], что скорость оптических солитонов постоянна в среднем). Профиль этой волны определяется уравнением (15), которое превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1-\beta_o\beta_2 v^2}{\beta_o}\left[2I\frac{d^2I}{ds^2} - \left(\frac{dI}{ds}\right)^2\right] = \\ &= \left[b + \frac{b^2}{2\beta_o} - \gamma I\right]8I^2 \end{aligned} \tag{18}$$

Особенностью уравнения (18) является простое приведение его к безразмерному виду, использующее параметры самого уравнения без привлечения посторонних констант. Действительно, переходя в (18) к новым безразмерным переменным

$$\tau = (z - z_o - vt)\sqrt{b(b+2\beta_o)\big/\left(1-\beta_o\beta_2 v^2\right)}\,, \tag{19}$$

где $I = E_m^2 q$, E_m - амплитудное значение напряжённости вводимого излучения, получим

$$2q\ddot{q} - \dot{q}^2 = 4q^2 - 8\lambda q^3\,, \tag{20}$$

$$\lambda = \left(\beta_o \gamma E_m^2\right)\big/\left(b(b+2\beta_o)\right), \tag{21}$$

а точкой обозначена производная по безразмерной переменной τ. Для значений напряжённости E_m меньших внутриатомных полей число λ много меньше единицы [3].

Общее решение уравнения (20) имеет сингулярность при $\lambda = 0$. Следовательно, оно не может быть получено по теории возмущений, начиная с линейного уравнения. Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Общее решение уравнения (20), рассматриваемое как функция параметра λ, имеет в нуле полюс первого порядка.

Доказательство. Уравнение (20) эквивалентно следующей системе двух уравнений первого порядка:

$$\dot{q} = 2pq\,, \tag{22}$$

$$\dot{p} = -p^2 + 1 - 2\lambda q\,. \tag{23}$$

Действительно, дифференцируя (22) и, подставляя в полученное выражение (22) и (23), находим

$$\ddot{q} = 2q - 4\lambda q^2 + 2p^2 q \ .$$

Подставляя сюда $p = \dot{q}/2q$ из (22) получим (20).

Для доказательства теоремы из (23) выражаем

$$q = \left(-\dot{p} - p^2 + 1\right)/2\lambda \ . \qquad (24)$$

Теперь, подставляя (24) в (22), получим уравнение второго порядка для p :

$$\ddot{p} = 2p\left(1 - p^2\right). \qquad (25)$$

Т.к. это уравнение не содержит λ, то его общее решение $p = f(\tau, C_1, C_2)$, будучи подставленным в (24), доказывает теорему.

Очевидным решением последнего уравнения является $p = -th\tau$, тогда из (24) следует $q = 1/\lambda ch^2\tau$, что является простой иллюстрацией приведённой выше теоремы. Более того, это выражение является локализованным решением уравнения (20) для безразмерной интенсивности огибающей, что отвечает солитонному решению уравнения (10). Возвращаясь к размерным величинам находим решение (13) уравнения (10):

$$A = \exp\{ibz\}\sqrt{\left(2b\left(b + 2\beta_o\right)\right)/\left(\gamma\beta_o ch^2\tau\right)} \ . \qquad (26)$$

В том, что (26) является точным решением уравнения (10) легко убедиться прямой подстановкой. Сравнение (26) и (5) с учётом (19) явно не в пользу формулы (5). Объединяет их только наличие гиперболического косинуса, но, это является характерной чертой уравнения (10) при любом типе нелинейного отклика среды [9].

Заключение

Задача нахождения локализованных решений расширенного нелинейного уравнения распространения оптических импульсов в кварцевых волокнах (10) не может быть решена по теории возмущений, начиная с линейного уравнения несмотря на малость параметра нелинейности.

Найдено точное солитонное решение уравнения (10), имеющее вид (26), что указывает на применимость системы (22), (23) к нелинейным уравнениям.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации мероприятий Программы повышения конкурентоспособности СГАУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013-2020 годы.

Литература

1. Агравал, Г.П. Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир. – 1996. – 324с.
2. Agrawal, G.P. Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press. – 2007. – 478p.
3. Agrawal, G.P. Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press. – 2013. – 629p.
4. Кившарь, Ю.С. Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М.: Физматлит. – 2005. – 648с.
5. Захаров В.Е. Солитоны и коллапсы…/ В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов // УФН. – 2012. – Т.182. - №6. – С. 569-592.
6. Захаров В.Е. Оптические солитоны и квазисолитоны/ В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов //ЖЭТФ. – 1998. – Т.113. Вып. 5. – С. 1892-1914.
7. Ахмедиев Н.Н. Солитоны./ Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич. - М.: Физматлит. – 2003. – 304с.
8. Алименков И.В. Решение в квадратурах уравнения распространения импульсов в оптических волокнах / И.В. Алименков, Ю.Ж.Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37. – Вып. 3. – С. 294-296.
9. Алименков И.В. Применение гамильтонова формализма для решения нелинейного уравнения волоконной оптики / И.В. Алименков // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 83-87.