Расщепление уравнений неголономной механики

А.И. Кобрин[1], В.А. Соболев[2]

[1]Национальный исследовательский университет «МЭИ», Красноказарменная улица 14, Москва, Россия, 111250
[2]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Широкий класс уравнений неголономной механики описывается системами дифференциальных уравнений с сингулярными возмущениями, характерной особенностью которых является линейность по быстрым переменным. Для анализа таких систем используется геометрический метод декомпозиции, основанный на технике интегральных многообразий быстрых и медленных движений. В качестве примера рассмотрены уравнения, описывающие динамику саней Чаплыгина.

1. Введение

Предлагаемая работа посвящена приложению методов построения инвариантных многообразий быстро-медленных систем [1,2] к задачам «неголономной механики» [3]. При использовании неголономной модели внешнее силовое поле обычно полностью не задано. Однако вырожденная (порождающая) система определена. Для этого используется «экспериментальный материал» о некоторых квазискоростях – линейных формах обобщенных скоростей точек системы с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат. Исходную систему уравнений можно доопределить, используя поведение в быстро текущем времени решений присоединенной по Тихонову системы [4]. Практически всегда имеет место существование в неголономной системе первого интеграла типа закона сохранения энергии и, вместе с тем, наличие аттракторов, неизолированность точек равновесия и т.д. Дело в том, что неголономная модель является начальным приближением к медленной составляющей интегральных многообразий исходной задачи. Но в быстро-медленной системе есть и быстрая составляющая решения, которая, в частности, во многом берет на себя учет диссипации, оставляя неголономной модели только следы своего присутствия (иногда, достаточно выразительные). Классическое использование неголономной системы уравнений для исследования теоретико-механических задач требует ее обоснованного применения на бесконечном или, по крайней мере, сверхдлинном временном интервале: проверка равномерной по времени непрерывной зависимости от начальных условий, построение первых интегралов, проверка существования инвариантной меры и т.д., и т.п. Суждение об этой возможности при определенных условиях может быть обеспечено использованием методов теории инвариантных многообразий.

В качестве примера исследования «неголономной задачи» методами построения инвариантных интегральных многообразий, содержащих медленную составляющую решений исходной быстро-медленной задачи, можно рассмотреть задачу С.А. Чаплыгина [5].

2. Метод декомпозиции

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x) + F(x)y, \tag{1}$$

$$\varepsilon\dot{y} = g(x) + G(x)y, \tag{2}$$

для векторных переменных x и y, где ε – положительный малый параметр. Обычное предположение состоит в том, что матрица $G(x)$ ограничена по норме вместе с обратной и гурвицева. Тогда применительно к системе (1)-(2) геометрический метод декомпозиции [2] состоит в следующем. Существует замена переменных

$$x = v + \varepsilon H(v, z, \varepsilon), \quad y = z + h(x, \varepsilon), \tag{3}$$

приводящая систему (1)-(2) к виду

$$\dot{v} = f(v) + F(v)h(v, \varepsilon), \tag{4}$$

$$\varepsilon\dot{z} = Z(v, z, \varepsilon)z, \tag{5}$$

где $Z(v, z, 0) = G(v)$. Функция $h(x, \varepsilon)$ описывает инвариантное многообразие медленных движений системы (1)-(2), а функция $\varepsilon H(v, z, \varepsilon)$ описывает инвариантное многообразие быстрых движений вспомогательной расширенной системы. Обе функции конструктивно вычисляются в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра [2].

3. Задача Чаплыгина

«Въ качествѣ примѣра разсмотримъ движенiе твердаго тѣла параллельно плоскости. Представимъ себѣ твердое тѣло, опирающееся на горизонтальную плоскость тремя точками; двѣ изъ этихъ точекъ представляютъ простыя свободно скользящiя ножки; третья есть точка прикосновенiя остраго колесика, горизонтальная ось котораго неизмѣнно вкрѣплена въ движущееся тѣло; допустимъ, что скорость скольжения колесика въ направленiи, перпендикулярномъ къ его плоскости мала. Обслѣдуемъ движенiе тѣла по инерцiи» [5].

Обозначим через x, y - координаты центра масс, который лежит на оси, расположенной в плоскости колесика; φ- угол поворота корпуса; h – расстояние от «точки прикосновенiя остраго колесика» до центра масс.

Кинетическая энергия тела (m -масса, I_c - момент инерции)

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\varphi}^2$$

Уравнения движения, учитывающие не вполне известную реакцию F подстилающей поверхности, ортогональную плоскости колесика, имеют вид

$$m\ddot{x} \cong -F\sin\varphi$$

$$m\ddot{y} \cong F\cos\varphi$$

$$I_c\dot{\omega} \cong -Fh$$

Замена переменных (от скоростей центра масс к квазискоростям – продольной u и поперечной v в точке контакта колесика с поверхностью).

$$u = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi$$

$$v = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi - h\dot{\varphi}$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

Уравнения движения в новых переменных

$$m\dot{u} = m\omega(v + h\omega)$$

$$m\dot{v} = \frac{I_c + mh^2}{I_c}F - m\omega u \quad u$$

$$I_c\dot{\omega} = -Fh$$

В соответствии с условием «примера» положим

$$v = \varepsilon V, |V| \leq C, \varepsilon = 1.$$

$$\dot{u} = \omega(\varepsilon V + h\omega)$$

$$\varepsilon\dot{V} = \frac{I_c + mh^2}{mI_c}F - \omega u$$

$$I_c\dot{\omega} = -Fh$$

Полагая при работе с уравнениями $\varepsilon = 0$, получаем

$$m\dot{u} = mh\omega^2 + O(\varepsilon)$$

$$F = \frac{mI_c}{I_c + mh^2}\omega u + O(\varepsilon)$$

$$(I_c + mh^2)\dot{\omega} = -mh\omega u + O(\varepsilon)$$

$$v = 0 + O(\varepsilon)$$

Условие неголономной связи на квазискорость, ортогональную колесику,

$$v = 0,\ (-\sin\varphi \ \cos\varphi \ -h\dot{\varphi})\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} = 0$$

Следуя методике построения уравнений динамики неголономных систем, формируем суммарную нулевую мощность реакции неголономной связи - множителя Лагранжа λ

$$(-\lambda\sin\varphi)\dot{x} + (\lambda\cos\varphi)\dot{y} - (\lambda h)\dot{\varphi} = 0$$

Выделяя обобщенные силы получаем уравнения движения неголономной модели

$$m\ddot{x} \cong -\lambda\sin\varphi$$

$$m\ddot{y} \cong \lambda\cos\varphi$$

$$I_c\dot{\omega} \cong -\lambda h$$

Сила F в нулевом приближении равна множителю Лагранжа.

$$F = \lambda = \frac{mI_c}{I_c + mh^2}\omega u$$

Обобщенные скорости системы могут быть выражены через $2 = 3 - 1$ независимых псевдоскорости u, ω

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -h\sin\varphi\\ \sin\varphi & h\cos\varphi\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ \omega\end{pmatrix}$$

Поскольку u, ω независимы, из уравнения неголономной связи получаем

$$(-\sin\varphi \ \cos\varphi \ -h\dot{\varphi})\begin{pmatrix}\cos\varphi & -h\sin\varphi\\ \sin\varphi & h\cos\varphi\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0$$

Это позволяет исключить неопределенные множители из уравнений движения и получить матричную форму Маджи уравнений движения неголономной системы

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -h\sin\varphi & h\cos\varphi & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\ddot{x}\\ m\ddot{y}\\ I_c\ddot{\varphi}\end{pmatrix} = 0$$

Введем быстрое время $\tau = t/\varepsilon$. В быстром времени система уравнений движения саней Чаплыгина примет вид

$$u' = \varepsilon\omega(\varepsilon V + h\omega)$$

$$V' = \frac{I_c + mh^2}{mI_c} F - \omega u$$

$$I_c\omega' = -\varepsilon Fh$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получим присоединенную по Тихонову систему

$$u' = 0$$

$$V' = \frac{I_c + mh^2}{mI_c} F - \omega u$$

$$\omega' = 0$$

Теорема А.Н.Тихонова предписывает достаточные условия выбора модели для действующей на колесико боковой силы, обеспечивающей малость «скорости скольжения колесика въ направленіи, перпендикулярномъ къ его плоскости».

Используя уравнения присоединенной системы сделаем дополнительное предположение с этой целью. Конечно, сделанный выбор неоднозначен. Пусть $V = -\frac{T}{m}F$, здесь T - характерная конечная постоянная времени t, и пусть $T = 1$. В этом случае

$$m\dot{u} = m\omega(\varepsilon V + h\omega)$$

$$\varepsilon\dot{F} = -\frac{I_c + mh^2}{I_c} F + m\omega u$$

$$I_c\dot{\omega} = -Fh$$

Используя полученное в нулевом приближении выражение для силы F, и вводя обозначение $k = \frac{mI_c}{I_c + mh^2}$, имеем

$$\varepsilon\dot{F} \approx \varepsilon k(\dot{u}\omega + u\dot{\omega}) = \varepsilon k[\omega^2(h\omega - \varepsilon F) - \frac{h}{I}uF] = m\left(-\frac{F}{k} + u\omega\right)$$

Получаем следующее приближение к интегральному многообразию (ИМ) рассматриваемой системы

$$m\dot{u} = m\omega(-\varepsilon F + h\omega) + O(\varepsilon^2)$$

$$I_c\dot{\omega} = -Fh + O(\varepsilon^2)$$

$$F = k\omega u + \varepsilon hk^2\omega(\frac{ku^2}{I_c} - \omega^2) + O(\varepsilon^2)$$

$$v = \varepsilon k\omega u + O(\varepsilon^2)$$

Процедура построения последовательности приближений, разумеется, может быть продолжена.

4. Благодарности

А. И. Кобрин выражает признательность РФФИ за поддержку исследований в рамках научного проекта № 16-01-00429. В. А. Соболев благодарен РФФИ и Правительству Самарской области за поддержку исследований в рамках научного проекта № 16-41-630524.

5. Литература

[1] Strygin, V.V. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of dual-spin satellites / V.V. Strygin, V.A. Sobolev // Cosmic Research. – 1976. – Vol. 14(3) – P. 331-335.

[2] Воропаева, Н.В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. – М: Физматлит, 2009. – 256 с.

[3] Неймарк, Ю.И. Динамика неголономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М: Физматлит, 1967. – 520 с.

[4] Тихонов, А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных / А.Н. Тихонов // Матем. Сборник. – 1952. – Т. 31(73), № 3. – С. 575–586.

[5] Воропаева, Н.В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. – М: Физматлит, 2009. – 256 с.

Decomposition of Non-holonomic Mechanics Models

A.I. Kobrin[1], V.A. Sobolev[2]

[1]National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia
[2]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. A wide class of equations of nonholonomic mechanics is described by systems of differential equations with singular perturbations, the characteristic feature of which is linearity with respect to fast variables. To analyze such systems, a geometric decomposition method is used, based on the technique of integral varieties of fast and slow motions. As an example, equations describing the dynamics of the Chaplygin sleigh are considered.

Keywords: non-holonomic mechanics, singular perturbations, invariant manifolds.