

Распространение пучков, заданных в виде сфероидальных функций, с помощью преобразования Френеля

А.С. Крупников¹, М.С. Кириленко^{1,2}

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

²Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

Аннотация

Рассматриваются сфероидальные функции, рассчитанные методом решения уравнения на собственные значения и собственные векторы для преобразования Фурье в конечных пределах. Моделируется распространение полученных функций с помощью преобразования Френеля. Показано, что сфероидальные функции сохраняют свой вид с точностью до масштаба при распространении в свободном пространстве.

Ключевые слова

Сфероидальные функции, преобразование Фурье, преобразование Френеля, свободное пространство, линзовая система

1. Введение

Сфероидальные функции представляют собой полный набор функций с ограниченной спектральной полосой [1]. Одна из областей применения сфероидальных функций – это теория изображений. В этой области сфероидальные функции стали применяться после того, как была установлена их связь с преобразованием Фурье в конечных пределах [2].

Сфероидальные функции не имеют аналитического представления, поэтому их следует рассчитывать численно. Один из способов расчёта сфероидальных функций - как собственные функции преобразования Фурье. В работе [3] был предложен метод, основанный на двукратном применении преобразования Фурье с разными пределами интегрирования. Такое преобразование описывает прохождение светового пучка через двухлинзовую систему с ограниченными входной и спектральной областью в одномерном случае. Рассчитанные сфероидальные функции будут являться ортогональными на заданном ограниченном участке [1].

Хорошо известно, что для линзовых систем с неограниченной входной областью в одномерном случае модами являются моды Гаусса-Эрмита [4]. С точностью до изменения масштаба они же являются модами и для свободного пространства, описываемое с помощью преобразования Френеля (для параксиальных пучков) [5]. В данной работе исследуется поведение сфероидальных функций при выполнении преобразования Френеля.

2. Моделирование

Преобразование Френеля в одномерном случае выглядит следующим образом:

$$F(u, z) = \sqrt{-\frac{ik}{2\pi z}} \exp(ikz) \int_{-a}^a f(x) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x-u)^2\right] dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – входной световой пучок, $F(u, z)$ – распределение светового пучка на расстоянии z от входной плоскости, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, a – параметр, ограничивающий входную область при моделировании.

В данной работе рассматриваются следующие параметры: $\lambda = 1$ микромметр, $z = 1000$ микромметров, $\alpha = 50$ микромметров.

Расчёты сфероидальных функций были осуществлены на основании метода в [3]. На рисунке 1 представлены амплитуды светового пучка, заданного сфероидальной функцией, до выполнения преобразования и после него.

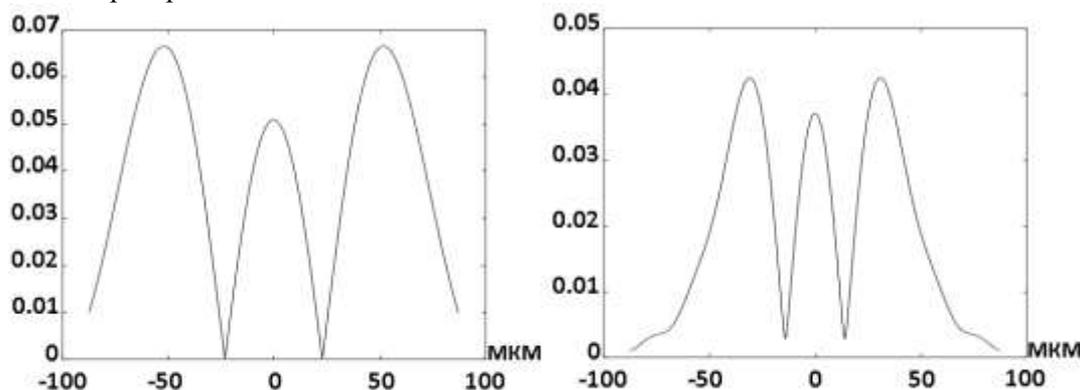


Рисунок 1: Сфероидальная функция до и после выполнения преобразования Френеля

3. Заключение

Как видно из рисунка 1, сфероидальная функция ведёт себя как масштабно-изменяющаяся мода: форма пучка сохраняется. Однако в картине есть и изменения. На входе функция не обращалась в ноль на границе. На выходе функция «сжалась» и стала приближаться к нулю на границе – часть энергии перетекла в эту область. Это также отразилось и на значениях функции – её пиковые значения уменьшились.

Таким образом, сфероидальные функции можно использовать как пучки, устойчивые к искажениям, связанным с пространственными ограничениями, при распространении в свободном пространстве.

4. Благодарности

Работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-20045 мк).

5. Литература

- [1] Slepian, D. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I / D. Slepian, H.O. Pollak // Bell Syst. Technol. J. – 1961. – Vol. 40. – P. 43-63.
- [2] Хонина, С.Н. Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами / С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 1999. – Т. 19. – С. 65-70.
- [3] Kirilenko, M.S. Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // SPIE. – 2014. – P. 91560J.
- [4] Yariv, A. Quantum Electronics / A. Yariv. – NY: Wiley, 1975.
- [5] Kogelnik, H. Laser Beams and Resonators / H. Kogelnik, T. Li // Appl. Opt. – 1966. – Vol. 5(10). – P. 1550-1567.