

# Расчет пространственного спектра многомерных фракталов с использованием быстрого преобразования Фурье

О.А. Моссоулина<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

## Аннотация

Рассмотрено быстрое преобразование Фурье для моделирования пространственного спектра одномерного фрактала (множество Кантора), двумерного фрактала (ковёр Серпинского) и трёхмерного фрактала (губка Менгера). Построен спектр для различных уровней. Так же был получен и смоделирован пространственный спектр от различных параметров заполнения. Для визуализации 3D случая использовался программный пакет ParaView.

*Ключевые слова:* множество Кантора; ковёр Серпинского; губка Менгера; быстрое преобразование Фурье; 3D моделирование

## 1. Введение

Многие природные явления имеют отличительные особенности, которые зачастую связаны с фрактальными структурами. Визуально фракталы представляют собой геометрическую фигуру, которая может быть разделена на части, каждая из которых является примерной уменьшенной копией целой [1]. Такое свойство называется самоподобием. Интерес к фракталам вызван их значительным присутствием в природных образованиях [1-3]. При этом природные фракталы называются «статистическими», а искусственные «точными». Статистические фракталы наблюдаются в различных веществах, особенно полимерах, в биологических структурах, электрических схемах, галактических кластерах и даже во флуктуациях биржевых цен [4]. Точные фракталы – порождение математических подходов [5]. Существуют ли точные математические абстракции в физической реальности? Да, такой реальностью являются оптические фракталы [3] – понятие объединяющее «дифракталы» (дифракционную картину на фрактальных решетках) [6, 7], собственные моды нестабильных резонаторов [8], распределения в нелинейной оптике [3, 9].

Особенно интересным является факт совпадения определенных свойств «точных» и «статистических» фракталов [10], таких как аэрозоли, дым, муар [11-13], что очень важно для решения задач передачи оптического сигнала через неоднородную или случайную среду [14-17]. Исследование дифракции на фрактальных решетках [6, 7, 18-20] решает другие важные проблемы – формирование периодически самовоспроизводящихся при распространении полей [21-26], создание многофокусных [27-30] или заданных продольных распределений [31-33], а также в ахроматических изображающих системах [34-37].

Одной из важнейших характеристик фракталов является пространственный спектр [38-41], которые важны также при анализе кристаллических структур [42-44]. Учитывая возможную многомерность фракталов, при расчете пространственного спектра могут возникать проблемы, связанные с вычислительной сложностью, которая зависит от технических возможностей современных вычислительных машин. Решением проблемы может являться использование алгоритма быстрого вычисления. В данной работе для построения пространственного спектра многомерных фракталов с различными характеристиками применяется быстрое преобразование.

## 2. Расчет пространственного спектра многомерных фракталов

Первый этап моделирования является реализация одномерного случая. Возьмем единичный отрезок  $E_0 = [0, 1]$ . Следующий отрезок формируется по правилу  $E_1 = [0, a] \cup [b, 1]$ , где  $a$  и  $b$  - параметры фрактала, задаваемые в диапазоне  $(0, 1)$ , причем  $a < b$ . Продолжаем до тех пор, пока не достигнем нужного порядка фрактала. Пересечение всех отрезков будет составлять моделированный фрактал.

$$E = \bigcap_{i=1}^n E_i \quad (1)$$

где  $n$  - порядок фрактала.

Если задать параметры равными  $a = \frac{1}{3}$  и  $b = \frac{2}{3}$ , то мы получаем множество Кантора.

Для программирования используется вектор, состоящий из единиц, который последовательно заполняется нулями, согласно входным параметрам и порядку.

Для моделирования двумерного случая использовалась похожая реализация с некоторыми поправками. Берётся единичный квадрат  $E_0 = [0, 1] \times [0, 1]$  и уже следующий выглядит, как  $E_1 = ([0, a_1] \cup [b_1, 1]) \times ([0, a_2] \cup [b_2, 1])$ , где  $a_1, a_2,$

$b_1$  и  $b_2$  - параметры фрактала, задаваемые в диапазоне  $(0,1)$ , причем  $a_1 < b_1$  и  $a_2 < b_2$ . Моделированный фрактал, как и для одномерного случая, будет находиться по формуле (1). Если задать параметры равными  $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{2}{3}$  и  $b_2 = \frac{2}{3}$ , то мы получаем фрактал, который имеет название ковёр Серпинского (рис.1).

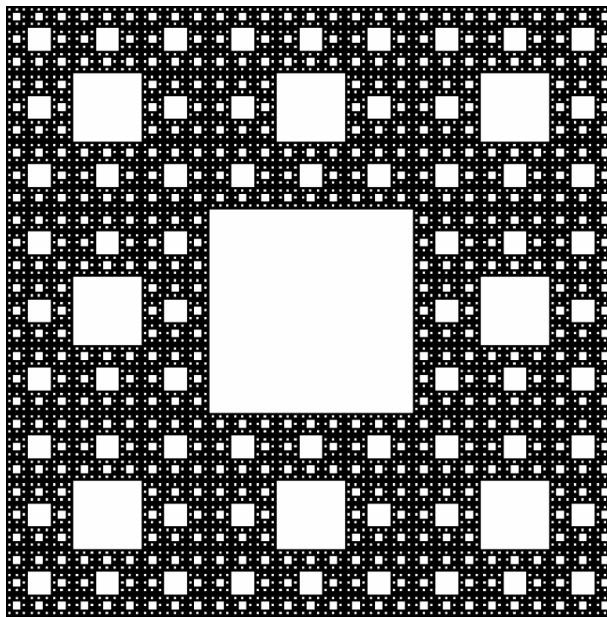
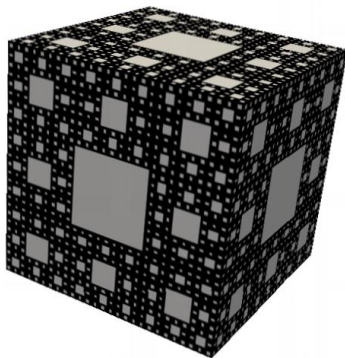
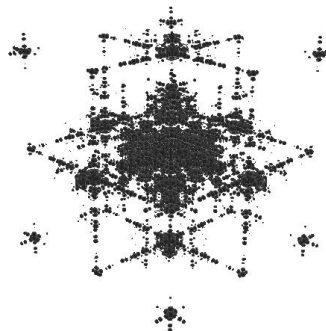


Рис. 1. Фрактал (ковёр Серпинского).

Трёхмерный случай реализован, так же как и двумерный случай, берется единичный куб:  $E_0 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$  и  $E_1 = ([0, a_1] \cup [b_1, 1]) \times ([0, a_2] \cup [b_2, 1]) \times ([0, a_3] \cup [b_3, 1])$ , где  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  и  $b_3$  - параметры фрактала, задаваемые в диапазоне  $(0,1)$ , причем  $a_1 < b_1, a_2 < b_2$  и  $a_3 < b_3$ . При параметрах  $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = \frac{2}{3}$  и  $b_3 = \frac{2}{3}$  получается трёхмерный фрактал – губка Менгера (рис.5), которая на граничном сечении представляет собой ковёр Серпинского.



а)



б)

Рис. 2. а) Трёхмерный фрактал (губка Менгера), б) пространственный спектр трёхмерного фрактала.

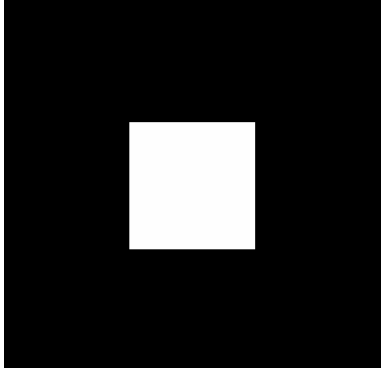
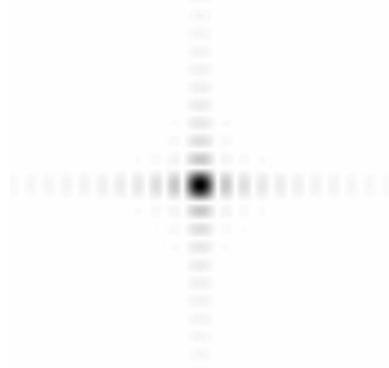
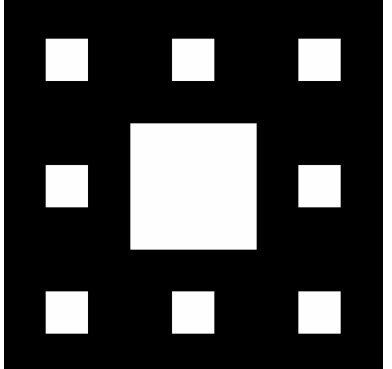
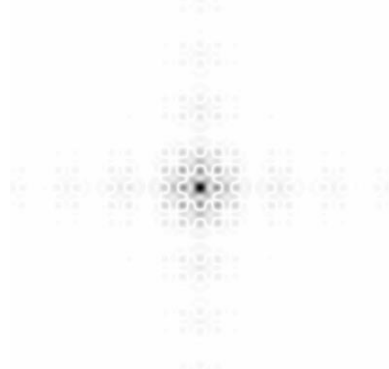
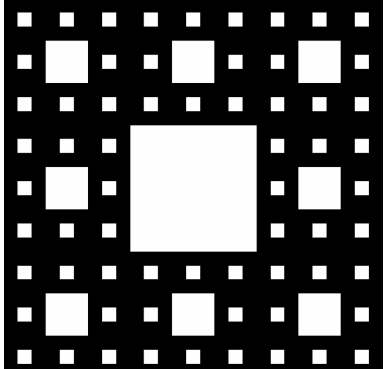
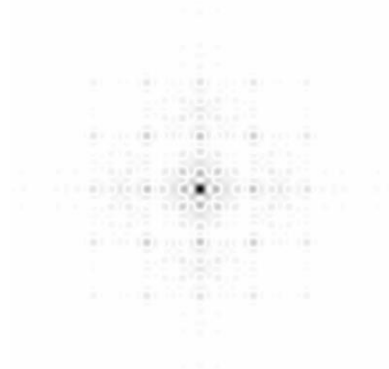
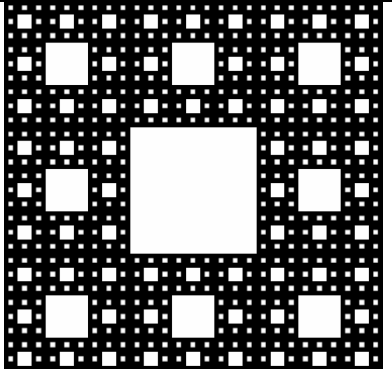
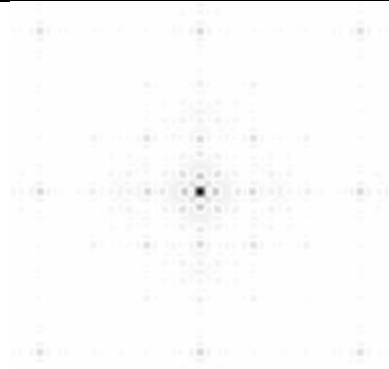
Для генерации пространственного спектра используется быстрое преобразование Фурье.

$$F(\mathbf{u}) = \mathfrak{Z}[f(\mathbf{x})](\mathbf{u}) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) \exp(-2\pi i \mathbf{x} \mathbf{u}) d^n \mathbf{x} \tag{2}$$

где  $f(\mathbf{x})$  - входная функция, задаваемая в виде вектора, которые представляет собой бинарное представление фрактала,  $F(\mathbf{u})$  - полученная выходная функция,  $\mathfrak{Z}[\cdot]$  - оператор преобразования Фурье.

Рассмотрим пространственный спектр, полученный от двумерной фрактальной структуры (ковёр Серпинского). Результат для разных итераций представлен в таблице 1.

**Таблица 1.** Изменение спектра с ростом итераций

Итерация	Фрактал	Спектр
2		
3		
4		
5		

Как видно из таблицы 1, при увеличении номера итерации пространственный спектр от фрактальной структуры становится более сложным и энергия в высоких частотах растет. Однако картина спектра сохраняет регулярную структуру, что характерно и для кристаллических структур [42-44].

### 3. Заключение

В результате работы был рассчитан и визуализирован пространственный спектр от двумерной (ковёр Серпинского) и трёхмерной (губка Менгера) фрактальной структуры с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ.

## Литература

- [1] Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature* / B.B. Mandelbrot. – New York: W. H. Freeman and Company, 1983. – 468 p.
- [2] Barnsley, M. *Fractals Everywhere*. Academic / M. Barnsley. – Boston: Mass., 1988. – 534 p.
- [3] Segev, M. *Fractal optics and beyond* / M. Segev, M. Soljacic, J. M. Dudley // *Nature Photonics*. – 2012. – Vol. 6(4). – P. 209-210.
- [4] Addison, P. S. *Fractals and Chaos* / P. S Addison // *An illustrated course IOP*. – 1997. – 256 p.
- [5] Федер, Е. *Фракталы* / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
- [6] Berry, M.V. *Diffractionals* / M.V. Berry // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1979. – Vol. 12. – P. 781-797.
- [7] Berry, M.V. *Integer, fractional and fractal Talbot effects* / M.V. Berry, S. Klein // *J. Mod. Opt.* – 1996. – Vol. 43(10). – P. 2139-2164.
- [8] Karman, G.P. *Laser optics: Fractal modes in unstable resonators* / G.P. Karman, G.S. McDonald, G.H.C. New, J.P. Woerdman // *Nature*. – 1999. – Vol. 402(6758). – 138 p.
- [9] Gabitov, I. R. *Propagation of Ultrashort Optical Pulses in Degenerate Laser Amplifiers* / I. R. Gabitov, S. V Manakov // *Phys. Rev. Lett.* – 1983. – Vol. 50(7). – 495 p.
- [10] Peitgen, H.O. *Chaos and fractals: new frontiers of science* / H.O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe // 2nd edn. New York, NY: Springer, 2004. – 864 p.
- [11] Forrest, S. *Long-range correlations in smoke-particle aggregates* / S. Forrest, T.A. Witten // *J. Phys. A.* – 1979. – Vol. 12(5). – L109 p.
- [12] Berry, M.V. *Optics of fractal clusters such as a smoke* / M.V. Berry, I.C. Percival // *Journal of Modern Optics*. – 1986. – Vol. 33(5). – P. 577-591.
- [13] Oster, G. *Theoretical interpretation of moire patterns* / G. Oster, M. Wasserman, C. Zwierling // *J. Opt. Soc. Am.* – 1964. – Vol. 54(2). – P. 169-175.
- [14] Стрилец, А.С. *Согласование и исследование методов, основанных на дифференциальном и интегральном операторах распространения лазерного излучения в среде с малыми неоднородностями* / А.С. Стрилец, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика* – 2008. – Т. 32, № 1 – С. 33-38.
- [15] Khonina, S.N. *Creating order with the help of randomness: generating transversely random, longitudinally invariant vector optical fields* / S.N. Khonina, I. Golub // *Optics letters*. – 2015. – Vol. 40(17). – P. 4070-4073.
- [16] Soifer, V.A. *Vortex beams in turbulent media* / V.A. Soifer, O. Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina // *Computer Optics*. – 2016. – Vol. 40(5). – P. 605-624.
- [17] Porfirev, A.P. *Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium* / A.P.Porfirev, M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56(11). – P. E8-E15.
- [18] Sakurada, Y. *Fresnel diffraction by 1-D regular fractals* / Y Sakurada, J. Uozumi, T. Asakura // *Pure Appl.* – 1992. – Vol. 1. – P. 29-35.
- [19] Jaggard, A.D. *Cantor ring diffractionals* / A.D. Jaggard, D.L. Jaggard // *Opt. Commun.* – 1998. – Vol. 158(1). – P. 141-148.
- [20] Szwajkowski, P. *Self-imaging in polar coordinates* / P. Szwajkowski // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1988. – Vol. 5(2). – P. 185-191.
- [21] Hou, B. *Diffraction by an optical fractal grating* / B. Hou, G. Xu, W. Wen, G.K.L. Wong // *Appl. Phys. Lett.* – 2004 – Vol. 85(25). – P. 6125-6127.
- [22] Mendez, D.C. *Talbot effect with Cantor transmittances* / D. C. Mendez, M. Lehman // *Optik.* – 2004. – Vol. 115(10). – P. 439-442.
- [23] Kotlyar, V.V. *An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images* / V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, S.N. Khonina // *Journal of Modern Optics*. – 1997. – Vol. 44(7). – P. 1409-1416.
- [24] Khonina, S.N. *Light beams with periodic properties* / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer // *Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements*, ed. Victor A. Soifer – New York John: Wiley & Sons, Inc., 2002. – P. 535-605.
- [25] Almazov, A.A. *Periodic self-reproduction of multi-mode laser beams in graded-index optical fibers* / A.A. Almazov, S.N. Khonina // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2004. – Vol. 13(1). – P. 63-70.
- [26] Khonina, S.N. *Self-reproduction of multimode laser fields in weakly guiding stepped-index fibers* / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2007. – Vol. 16(3). – P. 167-177.
- [27] Saavedra, G. *Fractal zone plates* / G. Saavedra, W. D. Furlan, J. A. Monsoriu // *Optics letters*. – 2003 – Vol. 28(12). – P.971-973.
- [28] Mihailescu, M. *Fractal-like diffractive arrangement with multiple focal points* / M. Mihailescu, A.M. Preda, A. Sobetkii, A.C. Petcu // *Opto-electronics review*. – 2009. – Vol. 17(4). – P. 330-337.
- [29] Kotlyar, V.V. *Diffraction computation of focusator into longitudinal segment and multifocal lens* / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Proceedings of SPIE*. – 1993. – Vol. 1780. – P. 263-272.
- [30] Soifer, V.A. *Multifocal diffractive elements* / V.A. Soifer, L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy // *Optical Engineering*. – 1994. – Vol. 33(11). – P. 3610-3615.
- [31] Khonina, S.N. *Calculation of the focusators into a longitudinal linesegment and study of a focal area* / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40(5). – P. 761-769.
- [32] Хонина, С.Н. *Расчёт линз для формирования парааксиального продольного распределения в соответствии с их пространственным спектром* / С.Н. Хонина, А.В. Устинов // *Компьютерная оптика*. – 2013. – Т. 37, №2. – С. 193-202.
- [33] Khonina, S.N. *Lenses to form a longitudinal distribution matched with special functions* / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // *Optics Communications*. – 2015. – Vol. 341. – P. 114-121.
- [34] Wang, Y.X. *Achromatic Fresnel optics for wideband extreme-ultraviolet and X-ray imaging* / Y. X. Wang, W. B. Yun, C. Jacobsen // *Nature*. – 2003. – Vol. 424(6944). – P. 50-53.
- [35] Furlan, W.D. *White-light imaging with fractal zone plates* / W. D. Furlan, G. Saavedra, J. A. Monsoriu // *Opt. Lett.* – 2007. – Vol. 32(15). – P. 2109-2111.
- [36] Andersen, G. *Broadband antihole photon telescope* / G. Andersen, D. Tullson // *Phys. R. A.* – 2007. – Vol. 46(18). – P. 3706-3708.
- [37] Хонина, С.Н. *Сравнительное исследование спектральных свойств асферических линз* / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Р.В. Скиданов, А.А. Морозов // *Компьютерная оптика* – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 363-369.
- [38] Allain, C. *Spatial spectrum of a general family of self-similar arrays* / C. Allain, M. Cloitre // *Phys. R. ev.* – 1987. – Vol. 36(12). – P. 5751-5757.
- [39] Uozumi, J. *Fraunhofer diffraction by Koch fractals* / J. Uozumi, H. Kimura, T. Asakura // *J. Mod. Opt.* – 1990. – Vol. 37(6). – P. 1011-1031.
- [40] Zunino, L. *Fraunhofer diffraction by cantor fractals with variable lacunarity* / L. Zunino, M. Garavaglia // *J. Mod. Opt.* – 2003. – Vol. 50(5). – P. 717-727.
- [41] Horvath, P. *Koch fractals in physical optics and their Fraunhofer diffraction patterns* / P. Horvath, P. Smid, I. Vaskova, M. Hrabovsky // *Optik.* – 2010. – Vol. 121(2). – P. 206-213.
- [42] Dal Negro, L. *Deterministic aperiodic nanostructures for photonics and plasmonics applications* / L. Dal Negro, S. V. Boriskina // *Laser Photonics Rev.* – 2011. – P. 1-41.
- [43] Харитонов, С.И. *Дифференциальный метод расчёта дифракции рентгеновских лучей на кристалле: скалярная теория* / С.И. Харитонов, С.Г. Волоотовский, С.Н. Хонина, Н.Л. Казанский // *Компьютерная оптика*. – 2015. – Т. 39, № 4. – С. 469-479.
- [44] Kharitonov, S.I. *Calculating x-ray diffraction on crystals by means of the differential method* / S.I. Kharitonov, N.L. Kazanskiy, S.G. Volotovskiy, S.N. Khonina // *International Society for Optics and Photonics*. – 2016. – 10 p.