

РАСЧЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ХАНКЕЛЯ ДЛЯ АБЕРРАЦИЙ ВОЛНОВОГО ФРОНТА, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ВИДЕ ПОЛИНОМОВ ЦЕРНИКЕ

А.С. Волков

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ)

Разработано программное обеспечение для расчета быстрого преобразования Фурье и преобразования Ханкеля для aberrаций волнового фронта, представленных в виде полиномов Цернике. Выполнено сравнение двух программ по быстродействию и ресурсозатратам.

Ключевые слова: волновые aberrации, полиномы Цернике, преобразование Фурье, преобразование Ханкеля.

Введение

Для исследования aberrаций волнового фронта линзы или оптической системы расчет зрачковой функции в большом множестве точек заменяется алгебраической моделью - полиномами Цернике [1], выведенными лауреатом Нобелевской премии, оптиком и изобретателем Фрицем Цернике [2]. В наше время к задаче минимизации aberrаций имеется высокий интерес, обусловленный применением в таких областях, например, как хирургия глаза [3]. Исключив в глазе aberrации высоких порядков [4, 5], человек смог бы обладать высокой контрастной чувствительностью и небывалой остротой зрения. Человечество навсегда бы забыло о таких патологиях как близорукость или астигматизм, что привело бы к значительному улучшению качества жизни.

В то же время современные научные исследования требуют все большей точности к эмпирическим результатам, что влечет повышения требований к качеству изготавливаемых оптических элементов, в том числе дифракционных [6, 7], служащих главным инструментом в исследованиях, связанных с фотоникой, квантовой оптикой и другими смежными науками.

В ходе выполнения исследовательской работы, была проведена разработка программы, рассчитывающей преобразования Фурье и Ханкеля от полиномов Цернике.

Теоретические основы

Аберрациями называются искажения в изображении, полученные из-за неспособности преломляющихся поверхностей оптической системы собрать все лучи в одной точке. Классифицируются на монохроматические и хроматические. В качестве примера монохроматических можно привести пять из них, выведенные Ф. Зейделем: сферическая aberrация, дисторсия, кривизна поля и астигматизм. Среди хроматических aberrаций основными считаются боковая и продольная.

Аберрации присущи любой оптической системе и в общем случае аберрация волнового фронта описывается суммой бесконечного ряда, где каждая составляющая относится к своему типу искажений.

С помощью полиномов Цернике можно провести моделирование и оценку конкретного типа аберраций оптической системы.

Круговой полином Цернике:

$$\Psi_{nm}(r, \varphi) = A_{nm} R_n^m \exp(im\varphi), \quad (1)$$

где

$$A_{nm} = \sqrt{\frac{n+1}{\pi r_0^2}}, \quad (2)$$

$$R_n^m = \sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p (n-p)! \left[p! \left(\frac{n+m}{2} - p \right)! \left(\frac{n-m}{2} - p \right)! \right]^{-1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-2p} \quad (3)$$

причем $|m| \leq n$, $(n-m)$ – четное.

В качестве преобразования Фурье использовалось быстрое преобразование Фурье (БПФ):

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \quad (4)$$

Преобразование Ханкеля (также известное как преобразование Фурье-Бесселя):

$$\hat{F}(\rho) = \int_0^R R_n^m J_m \left(\frac{k r \rho}{f} \right) r dr, \quad (5)$$

где

R_n^m - радиальный полином Цернике,

J_m - функция Бесселя m -го порядка,

k - волновое число,

f – фокусное расстояние.

Численные результаты

Исходный код программы написан на языке программирования высокого уровня – Java (версия JDK 1.8). Проект был создан с применением системы управления проектами Maven 3. В качестве сторонних библиотек используется математический пакет Apache Common Math3, а также библиотека для построения графиков JFreeChart.

Программа реализована по шаблону проектирования MVC (M – модель, V – вид, C – контроллер). В качестве модели данных выступают классы RadialPolynomial, PointXY, PolarPoint. Роль контроллера выполняет класс PolynomialController, содержащий вычислительные методы. Графический интерфейс реализован в классе View с помощью стандартной библиотеки Swing.

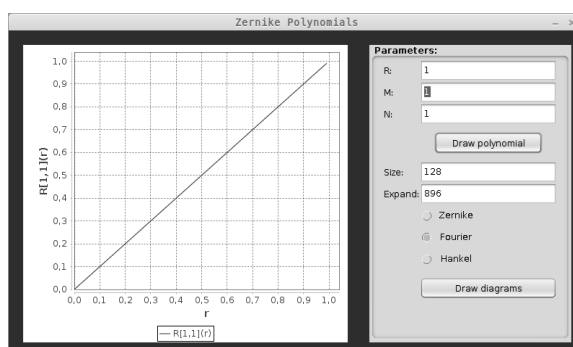


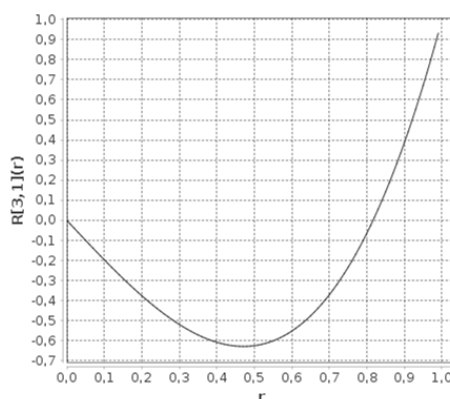
Рис.1. Пользовательский интерфейс программы

В ходе выполнения расчетов были выбраны полиномы со следующими коэффициентами М и N.

Табл. 1. Рассматриваемые случаи

№ п/п	Вид абберации	М	N
1	кома	1	3
2	астигматизм	2	4
3	абберации высоких порядков	2	8
4	абберации высоких порядков	3	5

После ввода значений R, M, N при нажатии на кнопку «Draw polynomial» в левой области программы будет производиться построение графика соответствующего радиального полинома. Ниже представлен пример для случая №1.

Рис. 2. График радиального полинома R_3^1

Для создания диаграммы амплитуд и фаз создается двумерный массив точек с координатами (x, y) с некоторым шагом h, которые в дальнейшем преобразуют в точки с полярными координатами (ρ, φ). Полученный массив точек используется для вычисления значений круговых полиномов Цернике, а также их быстрого преобразования Фурье и преобразования Ханкеля.

При вводе значений для поля «Size» задается размер получаемых изображений. Поле «Expand» служит для расширения комплексной матрицы нулями для наилучшего отображения центральной части полученного преобразования Фурье. Для вычисления БПФ сумма значений поля «Size» и «Expand» должны равняться степени двойки.

Ниже представлены таблицы диаграмм круговых полиномов Цернике и их быстрого преобразования Фурье, преобразования Ханкеля.

Табл. 2. Амплитуда полиномов Цернике

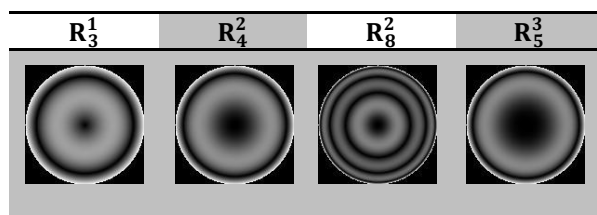


Табл. 3. Амплитуда преобразования Фурье

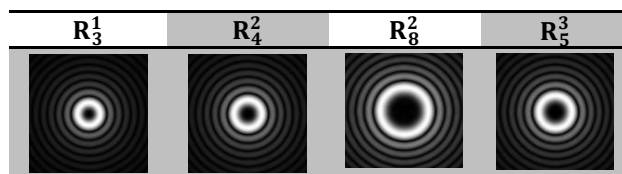
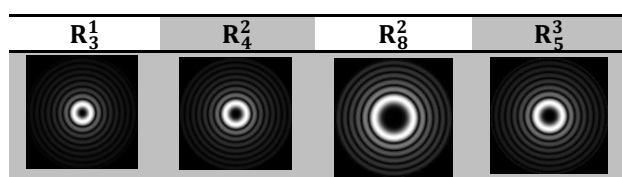


Табл. 4. Амплитуда преобразования Ханкеля



В качестве одного из наблюдений в ходе исследования стоит отметить, что в связи с тем, что алгоритмы БПФ учитывают порядок, но их учёт может отличаться от желаемого, (необходимо предварительно подготовить входные данные и затем обработать выходные, иначе результат может оказаться неверным), его использование является более трудоемким, чем применение преобразования Ханкеля.

Заключение

Сравнение двух разработанных программ для расчета быстрого преобразования Фурье и преобразования Ханкеля на примере входных функций в виде круговых полиномов Цернике показало следующие результаты. Быстрое преобразования Фурье применимо к любому типу входных полей, но для детального прописывания информации, сосредоточенной в низких частотах пространственного спектра, необходимо дополнять входное поля нулевыми отсчетами. Это приводит к дополнительным затратам по вычислительного времени и памяти. В случае, когда входное поле представимо в виде произведения радиальной и угловой вихревой функций, что справедливо для базиса круговых полиномов Цернике, то рациональным является использование преобразования Ханкеля. В этом случае не только происходит существенное сокращение затрат вычислительных ресурсов, но и возможно получение прямой информации о метрических характеристиках аберраций оптической системы.

Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. - Издательство "Наука", Москва, 1973. - 720 с.
2. Zernike, Physica. - 1934. - Vol. 1. - P. 689.
3. Artal, P. Optics of the eye and its impact in vision: a tutorial / P. Artal // Advances in Optics and Photonics. – 2014. – Vol. 6. – P. 340-367.
4. Дегтярев, С.А. Влияние изменения кривизны преломляющих поверхностей глаза на качество изображения на сетчатке в модели Лиоу–Бреннана / Дегтярев С.А., Карсаков А.В., Бранчевская Е.С., Хонина С.Н., Котляр В.В. // Компьютерная оптика, 39(5), 702-708 (2015).

5. Khonina, S.N. Zernike phase spatial filter for measuring the aberrations of the optical structures of the eye / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, D.V. Kirsh // Journal of Biomedical Photonics & Engineering. – 2015. – Vol. 1, Issue 2. – P. 146-153.
6. Дифракционная компьютерная оптика / Д. Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В. В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина // под ред. В.А. Сойфера. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 736 с.
7. Карпеев, С.В. Оптический анализ световых полей с помощью многопорядковых ДОЭ, согласованных с функциями Цернике / Карпеев С.В., Хонина С.Н. // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва. - 2010. - №4(24). - С. 202-214
8. Porfirev, A.P. Experimental investigation of multi-order diffractive optical elements matched with two types of Zernike functions / A.P. Porfirev, S.N. Khonina // Proceedings SPIE. - 2016. - v. 9807. - P. 98070E-(9pp).