

РАСЧЁТ ОРБИТАЛЬНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА АСИММЕТРИЧНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ ЛАГЕРРА-ГАУССА

А.А. Ковалёв^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}, А.И. Кортуква²

¹ Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Рассмотрено семейство ассиметричных лазерных мод Лагерра-Гаусса (аЛГ-пучки), полученных путём комплексного смещения обычных ЛГ-мод по декартовым координатам. Рассчитан орбитальный угловой момент (ОУМ) и показано, что он квадратично возрастает с ростом параметра асимметрии аЛГ-пучка, который равен отношению величины смещения к радиусу перетяжки. Получены условия, при которых нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом. Для аЛГ-пучков с нулевым радиальным индексом установлено положение максимума интенсивности и показано вращение дифракционной картины в форме полумесяца при распространении в пространстве.

Ключевые слова: теория дифракции, оптические вихри, распространение в пространстве, мода Лагерра-Гаусса, орбитальный угловой момент, мощность, комплексное смещение.

Введение

Моды Лагерра_Гаусса (ЛГ) – хорошо изученные параксиальные световые поля с радиально-симметричной формой интенсивности, инвариантной к распространению. Моды ЛГ нашли применение в манипулировании микрообъектами, квантовой оптике, оптических коммуникациях. Мода ЛГ имеет два индекса – радиальный и азимутальный, задающий орбитальный угловой момент (ОУМ). Несмотря на хорошую изученность мод ЛГ, до сих пор появляются публикации по изучению их свойств [1-5], формированию [6-8], и применению [9-13]. Так, в [1] рассматривается распространение соосных суперпозиций мод ЛГ, имеющих вид массивов одиночных или парных теневых пятен, расположенных на световых кольцах. В [2] исследуется физический смысл радиального индекса мод ЛГ, а в [3] исследуется распределение интенсивности остросфокусированного пучка ЛГ в зависимости от поляризации и топологического заряда. В [4] исследуется непараксиальное распространение мод ЛГ в присутствии апертуры. В [5] рассматриваются свойства световых полей, обладающих ОУМ и не имеющих радиальной симметрии, в присутствии гармонического потенциала. В [6] рассмотрено формирование мод ЛГ в резонаторе твёрдотельного лазера, а в [7] также исследуется формирование мод ЛГ низших порядков в твёрдотельном лазере с контролируемым знаком топологического заряда. В [8] моды ЛГ с ненулевым радиальным индексом формируются с помощью зонных спиральных фазовых пластинок. В [9] показано, что при использовании моды ЛГ вместо обычного Гауссова пучка уменьшается доплеровская ширина линии в спектре поглощения атомов рубидия-85 и рубидия-87, а в [10] рассматривается применение мод ЛГ для уменьшения влияния теплового шума в детекторах гравитационных волн. В [11] исследуется применение мод ЛГ для организации спин-орбитального взаимодействия в ультра-холодных атомах. В [12] изучается взаимодействие пучка ЛГ с атомом или двухатомной молекулой. Численно показано, что если атом или молекула достаточно охлаждена, то происходит передача ОУМ между движением её центра масс и внутренним движением. В [13]

описывается трёхмерная внеосевая оптическая ловушка диэлектрических субмикронных микросфер, созданная с помощью пучка ЛГ. Работа [14] посвящена применению мод ЛГ для квантовой связи на расстояние около 3 км в турбулентной атмосфере.

Из приведённого обзора видно, что моды ЛГ не только находят новые применения, но и являются основой для построения новых видов световых полей, которые пока только изучаются теоретически. Наряду с исследованием различных суперпозиций известных лазерных пучков новые их виды можно получать простым смещением комплексной амплитуды в декартовых координатах на комплексные расстояния. Так, например, выражение для поля точечного источника с мнимой координатой сводится к параксиальному Гауссову пучку [15]. Этим же путём получены асимметричные моды Бесселя, распределение интенсивности которых имеет вид полумесяца [16].

В данной работе, также пользуясь приёмом комплексного смещения, исследуются асимметричные пучки Лагерра-Гаусса (аЛГ-пучки). Аналитически рассчитан их орбитальный угловой момент (ОУМ). Рассмотрены аЛГ-пучки с нулевым радиальным индексом и с поперечным сечением интенсивности в форме полумесяца. Аналитически установлено положение максимума интенсивности и показано вращение дифракционной картины при распространении. Показана возможность формирования несоосных суперпозиций пучков с распределением интенсивности, близким к Гауссову, вращающихся при распространении как единое целое.

1. Асимметричные пучки Лагерра-Гаусса

В декартовых координатах (x, y, z) комплексная амплитуда аЛГ-пучка, получаемого из стандартного пучка ЛГ смещением на комплексные расстояния x_0 и y_0 вдоль координат x и y , имеет вид:

$$E_{mn}(x, y, z) = \frac{w(0)}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)} \right]^n \times \\ \times [(x-x_0) + i(y-y_0)]^n L_m^n \left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} - i(n+2m+1)\zeta(z) \right], \quad (1)$$

где w_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка, n – топологический заряд оптического вихря, $L_m^n(x)$ – присоединённый многочлен Лагерра, $\rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, $w(z) = w_0[1 + (z/z_R)^2]^{1/2}$, $R(z) = z[1 + (z/z_R)^2]$, $\zeta(z) = \arctan(z/z_R)$, $z_R = kw_0^2/2$ – расстояние Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ .

При $x_0 = y_0 = 0$ получается комплексная амплитуда стандартных пучков ЛГ [17]. Если смещения x_0 и y_0 не вещественные, то в поперечном сечении интенсивность пучка не имеет радиальной симметрии. На рис. 1 приведены результаты расчёта интенсивности пучка (1) на разных расстояниях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (8, 7)$, поперечные смещения $x_0 =$

$0, y_0 = 0.2\lambda i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0\lambda$ (рис. 1а), 12λ (рис. 1б), 20λ (рис. 1в), 40λ (рис. 1г), 60λ (рис. 1д), 80λ (рис. 1е).

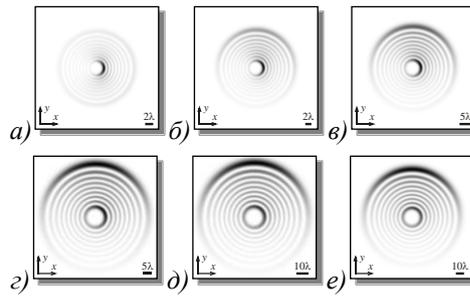


Рис. 1. Поперечное распределение интенсивности аЛГ-пучка в разных плоскостях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (8, 7)$, поперечные смещения $x_0 = 0, y_0 = 0.2\lambda i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0\lambda$ (а), 12λ (б), 20λ (в), 40λ (г), 60λ (д), 80λ (е)

Из рис. 1 видно, что при распространении пучка первое кольцо в виде полумесяца становится почти кольцом, хотя периферийные кольца полностью не восстанавливаются. Также видно, что при распространении аЛГ-пучка энергия перераспределяется из полумесяца в периферийные кольца.

1.1. Мощность смещённого пучка Лагерра-Гаусса

Мощность аЛГ-пучка легко найти путём разложения по плоским волнам. Она имеет вид:

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2} \frac{(m+n)!}{m!} \exp(-\xi) L_{m+n}^0(\xi) L_m^0(\xi), \quad (2)$$

где $\xi = -2(D_0/w_0)^2$, $D_0 = [(\text{Im } x_0)^2 + (\text{Im } y_0)^2]^{1/2}$.

При вещественных смещениях (x_0, y_0) параметр D_0 становится равным нулю и мощность равна $[\pi w_0^2/2][(m+n)!/m!]$, т.е. совпадает с формулой для мощности пучков ЛГ [17] с точностью до константы.

1.2. Орбитальный угловой момент смещённого пучка Лагерра-Гаусса

Аналогично с помощью разложения по плоским волнам может быть найдена проекция ОУМ аЛГ-пучка на оптическую ось (остальные проекции для параксиальных пучков равны нулю):

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{2 \text{Im}(x_0^* y_0)}{w_0^2} \left[\frac{L_m^1(\xi)}{L_m^0(\xi)} + \frac{L_{m+n}^1(\xi)}{L_{m+n}^0(\xi)} - 1 \right]. \quad (3)$$

Нормированный ОУМ зависит сразу от нескольких параметров – от обоих индексов полиномов Лагерра и от вещественных и мнимых смещений вдоль обеих декартовых координат. Рассмотрим частный случай, когда величина $x_0^* y_0$ чисто мнимая, причём комплексные смещения равны по модулю. Пусть $x_0 = a w_0 \exp(i\nu)$, $y_0 = i x_0$, где a – вещественное число ($a = |x_0/w_0|$). Тогда можно показать, что нормированный ОУМ зависит квадратично от параметра асимметрии.

Из (3) также следует, что при $x_0^*, y_0 \in \mathbb{C}$ нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом n , как в случае радиально-симметричных оптических вихрей, хотя форма пучка не обладает радиальной симметрией (если x_0 и y_0 чисто мнимые). Так, на рис. 2 показаны распределения интенсивности в плоскости $z = 0$ для аЛГ-пучков при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (3, 5)$, поперечные смещения $x_0 = 0.01wi$ и $y_0 = 0.01wi$ (рис. 2а), $x_0 = 0.05wi$ и $y_0 = 0.05wi$ (рис. 2б), $x_0 = 0.1wi$ и $y_0 = 0.1wi$ (рис. 2в), $x_0 = 0.2wi$ и $y_0 = 0.2wi$ (рис. 2г), $x_0 = 0.5wi$ и $y_0 = 0.5wi$ (рис. 2д), $x_0 = 2wi$ и $y_0 = 2wi$ (рис. 2е). При расчёте ОУМ на всех рис. 2 оказался равен 5.

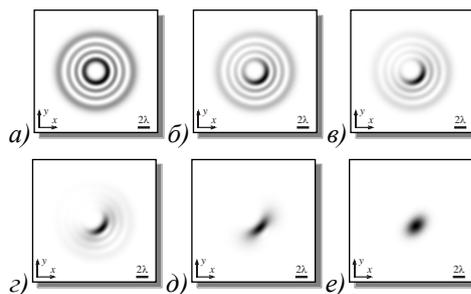


Рис. 2. Распределения интенсивности в плоскости $z=0$ для аЛГ-пучков при длине волны $\lambda = 532$ нм, радиусе перетяжки $w = 2\lambda$, индексе пучка $(m, n) = (3, 5)$, поперечных смещениях $x_0 = y_0 = 0.01wi$ (а), $x_0 = y_0 = 0.05wi$ (б), $x_0 = y_0 = 0.1wi$ (в), $x_0 = y_0 = 0.2wi$ (г), $x_0 = y_0 = 0.5wi$ (д), $x_0 = y_0 = 2wi$ (е)

Пучки на рис. 2 имеют разный вид, но их нормированный ОУМ одинаков. Асимметрия пучка растёт с ростом мнимых смещений $\text{Im}(x_0)$ и $\text{Im}(y_0)$, происходит "разрыв" светового кольца, и распределение интенсивности имеет вид светового пятна.

2. Параксиальные пучки Лагерра-Гаусса в форме вращающегося полумесяца

Выражение (1) упрощается при $m = 0$, т.е. на дифракционной картине всего одно световое кольцо. Приравняв нулю частные производные интенсивности по декартовым координатам, можно показать, что при $n > 0$ минимум интенсивности (точка фазовой сингулярности) находится в точке с координатами $(x_{\min}, y_{\min}) = (\text{Re } x_0 - \text{Im } y_0, \text{Re } y_0 + \text{Im } x_0)$, а положение максимума интенсивности зависит от расстояния z и вращается относительно минимума (x_{\min}, y_{\min}) :

$$\begin{cases} x_{\max} = x_{\min} + \beta [(\text{Im } x_0)z + (\text{Im } y_0)z_R], \\ y_{\max} = y_{\min} + \beta [(\text{Im } y_0)z - (\text{Im } x_0)z_R], \end{cases} \quad (4)$$

где $\beta = \{1 + [1 + 2n(w_0/D_0)^2]^{1/2}\} / (2z_R)$.

Максимум интенсивности поворачивается на угол α_0 на расстоянии

$$z = z_R \tan(\alpha_0). \quad (5)$$

На рис. 3 показана интенсивность пучка (1) при $m = 0$ в разных плоскостях для следующих значений параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$, топологический заряд $n = 8$, поперечные смещения $x_0 = w_0$ и $y_0 = iw_0$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (рис. 3а), $z_R \tan(\pi/12)$ (рис. 3б), z_R (рис. 3в), $z_R \tan(5\pi/12)$

(рис. 3г). Из рис. 3 видно, что вытянутое световое пятно поворачивается соответственно на углы $\pi/12$, $\pi/4$, $5\pi/12$, в то время как центр фазовой сингулярности остаётся в начале координат.

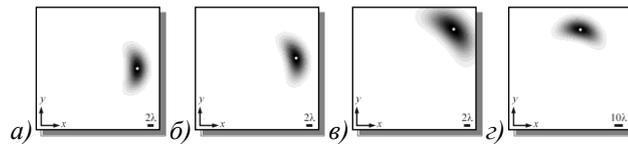


Рис. 3. Поперечное распределение интенсивности пучка (1) с нулевым радиальным индексом $m=0$ на разных расстояниях z при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$, топологический заряд $n = 8$, поперечные смещения $x_0 = 5\lambda = w_0$ и $y_0 = 5\lambda i = iw_0$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (а), $z_R \tan(\lambda/12)$ (б), $z_R \tan(\lambda/4) = z_R$ (в), $z_R \tan(5\lambda/12)$ (г). Белой точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (4)

3. Вращающиеся суперпозиции асимметричных пучков Лагерра-Гаусса

При дальнейшем увеличении мнимых смещений x_0 и y_0 асимметрия пучка возрастает настолько, что интенсивность на кольце сосредоточена вблизи точки максимума (4). Вместо полумесяца поле больше похоже на Гауссов пучок, но смещённый от начала координат и поворачивающийся относительно него при распространении в пространстве на угол $\pi/2$.

Суперпозиция пучков с разными смещениями D_0 , выглядит как набор несоосных Гауссовых пучков, которые при распространении поворачиваются на один и тот же угол, определяемый (5). Эти пучки почти не интерферируют между собой и при распространении дифракционная картина не меняет своего вида.

Так, на рис. 4 показано распространение суперпозиции двух аЛГ-пучков, комплексная амплитуда каждого из которых определяется по формуле (1). Коэффициенты суперпозиции подбирались так, чтобы максимальная интенсивность обоих пучков была одинакова. Другие параметры расчёта были выбраны следующими: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$ (расстояние Рэля $z_R = 25\pi\lambda$), индекс пучка $(m, n) = (0, 8)$, поперечные смещения первого пучка $x_0 = 5w_0$, $y_0 = 5w_0i$, поперечные смещения второго пучка $x_0 = 8w_0$, $y_0 = 8w_0i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (рис. 4а), $z = z_R$ (рис. 4б), $z = z_R \tan(5\pi/12)$ (рис. 4в). Из рис. 4 видно, что световой пучок, похожий на суперпозицию двух Гауссовых пучков, при распространении мало меняет свой вид и поворачивается на угол $\pi/4$ (рис. 4б) и $5\pi/12$ (рис. 4в).

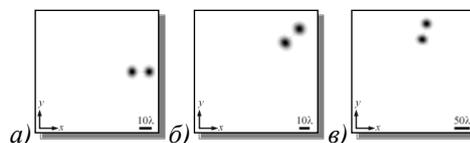


Рис. 4. Распределение интенсивности двух аЛГ-пучков при длине волны $\lambda = 532$ нм, радиусе перетяжки $w_0 = 5\lambda$, индексе пучков $(m, n) = (0, 8)$, поперечных смещениях первого пучка $x_0 = 5w_0$, $y_0 = 5w_0i$, поперечных смещениях второго пучка $x_0 = 8w_0$, $y_0 = 8w_0i$, расстояниях вдоль оптической оси $z = 0$ (а), $z = z_R$ (б), $z = z_R \tan(5\pi/12)$ (в)

Заключение

Рассмотрено обобщение лазерных мод Лагерра-Гаусса. Аналитически рассчитана мощность асимметричных пучков ЛГ и проекция их ОУМ на оптическую ось. Установлено, что нормированный ОУМ (ОУМ на фотон) квадратично растёт с ростом параметра асимметрии, равного отношению величины смещения к радиусу перетяжки

Гауссова пучка. Получены условия, при которых нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом (как у обычных мод Лагерра-Гаусса). Рассмотрены аЛГ-пучки с нулевым радиальным индексом, обладающие поперечным сечением интенсивности в форме полумесяца. Получено выражение для координат максимума интенсивности и показано вращение полумесяца при распространении в пространстве. Показана возможность формирования несоосных суперпозиций аЛГ-пучков с распределением интенсивности, близким к Гауссову, вращающихся при распространении в пространстве как единое целое. Асимметричные пучки ЛГ в виде полумесяца можно использовать для оптического захвата и перемещения биологических объектов (клеток) [18], так как клетка меньше подвергается тепловому воздействию, чем при захвате в симметричном Гауссовом пучке. Также аЛГ-пучки полезны в системах квантовой связи для формирования перепутанных по орбитальному моменту фотонов, так как ОУМ аЛГ-пучков может быть дробным, а дробный ОУМ соответствует фотону в перепутанном состоянии [19].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-9498.2016.9), а также грантов РФФИ 14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, и 15-47-02492.

Литература

1. Huang, S. Composite vortex beams by coaxial superposition of Laguerre-Gaussian beams / S. Huang, Z. Miao, C. He, F. Pang, Y. Li, T. Wang // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2016. – Vol. 78. – P. 132-139.
2. Plick, W.N. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams / W.N. Plick, M. Krenn // *Physical Review A*. – 2015. – Vol. 92. – No. 6. – P. 063841.
3. Савельев, Д.А. Особенности острой фокусировки вихревых пучков Гаусса-Лагерра / Д.А. Савельев, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2015. – Т. 39. – №. 5. – P. 654-662.
4. Stilgoe, A.B. Energy, momentum and propagation of non-paraxial high-order Gaussian beams in the presence of an aperture / A.B. Stilgoe, T.A. Nieminen, H. Rubinsztein-Dunlop // *Journal of Optics (United Kingdom)*. – 2015. – Vol. 17. – No. 12. – P. 125601.
5. Zhang, Y. Anharmonic propagation of two-dimensional beams carrying orbital angular momentum in a harmonic potential / Y. Zhang, X. Liu, M. Belić, W. Zhong, F. Wen, and Y. Zhang // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40. – P. 3786-3789.
6. Kim, D.J. High-power TEM₀₀ and Laguerre-Gaussian mode generation in double resonator configuration / D.J. Kim, J.W. Kim // *Applied Physics B*. – 2015. – Vol. 121. – No. 3. – P. 401-405.
7. Lin, D. Controlling the handedness of directly excited Laguerre-Gaussian modes in a solid-state laser / D. Lin, J. Daniel, W. Clarkson // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39. – P. 3903.
8. Ruffato, G. Generation of high-order Laguerre-Gaussian modes by means of spiral phase plates / G. Ruffato, M. Massari, F. Romanato // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39. – P. 5094.
9. Das, B.C. Narrowing of Doppler and hyperfine line shapes of Rb - D₂ transition using a vortex beam / B.C. Das, D. Bhattacharyya, S. De // *Chemical Physics Letters*. – 2016. – Vol. 644. – P. 212-218.
10. Allocca, A. Higher-order Laguerre-Gauss interferometry for gravitational-wave detectors with in situ mirror defects compensation / A. Allocca, A. Gatto, M. Tacca, R.A. Day, M. Barsuglia, G. Pillant, C. Buy, G. Vajente // *Physical Review D*. – 2015. – Vol. 92. – No. 10. – P. 102002.
11. Sun, K. Spin-orbital-angular-momentum coupling in Bose-Einstein condensates / K. Sun, C. Qu, C. Zhang // *Physical Review A*. – 2015. – Vol. 91. – No. 6. – P. 063627.
12. Mondal, P.K. Angular momentum transfer in interaction of Laguerre-Gaussian beams with atoms and molecules / P.K. Mondal, B. Deb, S. Majumder // *Phys. Rev. A*. – 2014. – Vol. 89. – P. 063418.

13. Otsu, T. Direct evidence for three-dimensional off-axis trapping with single Laguerre-Gaussian beam / T. Otsu, T. Ando, Y. Takiguchi, Y. Ohtake, H. Toyoda, H. Itoh // *Scientific Reports*. – 2014. – Vol. 4. – P. 4579.
14. Krenn, M. Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna / M. Krenn, R. Fickler, M. Fink, J. Handsteiner, M. Malik, T. Scheidl, R. Ursin, A. Zeilinger // *New Journal of Physics*. – 2014. – Vol. 16. – P. 113028.
15. Kravtsov, Y.A. Complex ray and complex caustics / Y.A. Kravtsov // *Radiophysics and Quantum Electronics*. – 1967. – Vol. 10. – P. 719–730.
16. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39. – No. 8. – P. 2395–2398.
17. Kim, H.C. Hermite–Gaussian and Laguerre–Gaussian beams beyond the paraxial approximation / H.C. Kim, Y.H. Lee // *Optics Communications*. – 1999. – Vol. 169. – P. 9–16.
18. Rykov, M.A. / M.A. Rykov, R.V. Skidanov // *Appl. Opt.* – 2014. – Vol. 53. – P. 156.
19. Mair, A. / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // *Nature*. – 2001. – Vol. 412. – P. 313.