Расчет критических условий в модели фильтрационного горения

О.В. Видилина[a], Е.А. Щепакина[a]

[a] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия*

Аннотация

Работа посвящена исследованию динамической модели автокаталитической реакции горения в двухфазной системе «горючий газ – инертная среда» с учетом частичного теплоотвода из реакционной фазы в окружающую среду. Особое внимание уделено моделированию критического режима, являющегося своеобразным водоразделом между режимами медленного выгорания газа и теплового взрыва. Разработан алгоритм вычисления критического значения управляющего параметра системы.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; фильтрационное горение; тепловой взрыв; критические явления

1. Введение

В последние годы увеличился поток исследований, связанных с изучением и применением многофазных систем горения. Результаты таких исследований находят широкое применение при решении проблем безопасности газовых выбросов, взрывоопасных пылевых облаков, детонации смесей, транспортировки и применения горючих и взрывчатых веществ.

В настоящей работе рассматривается математическая модель автокаталитической реакции горения в многофазной среде. Многофазность процесса обусловлена наличием, помимо реакционной, инертной фазы, в качестве которой может быть как запыленная среда, так и пористая матрица. Особое внимание уделено моделированию критического режима, являющегося своеобразным водоразделом между режимами медленного выгорания газа и теплового взрыва.

Основная задача математической теории теплового взрыва [1, 2] заключается в исследовании динамики процесса горения при заданных размерах реакционного сосуда, теплофизических и кинетических характеристиках, коэффициенте теплоотдачи. Все эти характеристики отражают параметры дифференциальной системы, являющейся математической моделью процесса. При некотором соотношении между значениями этих параметров реакция идет максимально долго, не срываясь в режим взрыва и не переходя в режим медленного выгорания. Соответствующий режим будем называть критическим.

Задача определения критических значений параметров и является целью данной работы. Для определения условий протекания критического режима последовательно применяются качественные и численные методы исследования. Основным результатом работы является вычисление значения управляющего параметра системы, отвечающего критическому режиму, что с математической точки зрения сводится к решению нелинейной системы алгебро-дифференциальных уравнений.

2. Модель фильтрационного горения

При обычных предположениях классической теории горения, включая предположение об однородности распределения температуры, необратимости и одностадийности химической реакции, отсутствии фазовых превращений, в случае автокаталитической реакции с учетом теплоотвода из реакционной фазы во внешнюю среду безразмерная модели фильтрационного горения имеет вид [2]:

$$\gamma \frac{d\Theta}{d\tau} = \eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right) - \alpha(\Theta - \Theta_c) - \delta\Theta, \tag{1}$$

$$\gamma_c \frac{d\Theta_c}{d\tau} = \alpha(\Theta - \Theta_c), \tag{2}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right), \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\eta(0) = \eta_0/(1+\eta_0) = \bar{\eta}_0,\ \ \Theta(0) = \Theta_c(0) = 0. \tag{4}$$

Здесь Θ, Θ_c – безразмерные температура газа и инертной среды соответственно; η – глубина превращения; τ – безразмерное время. Слагаемое $-\delta\Theta$ характеризует теплоотвод во внешнюю среду из реакционной фазы, слагаемое $-\alpha(\Theta - \Theta_c)$ отражает межфазный теплообмен. Параметр γ_c отражает физические свойства инертной среды и равен обратной величине максимальной адиабатической температуры инертной фазы, если все тепло реакции идет на её нагрев. Аналогичные физические свойства реакционной фазы отражает параметр γ. Отметим, что для типичных газовых смесей параметры β, γ малы [1-4]. Следовательно, система (1)-(3) является сингулярно возмущенной.

Как уже отмечалось, одной из основных задач теории горения и теплового взрыва является определение динамики реакции при заданных теплофизических и кинетических характеристиках реагирующего вещества, режима теплообмена и коэффициента теплоотдачи. Почти все эти характеристики включают в себя для системы (1)-(3) параметр α. По своему физическому смыслу он характеризует отношение интенсивности теплоотвода в окружающую среду. В зависимости от значения этого параметра происходит либо переход реакции к медленному режиму, что ведет к затуханию реакции – в этом случае теплоотвод интенсивнее тепловыделения, либо, в случае, когда интенсивность тепловыделения преобладает над теплоотводом, температура системы прогрессивно повышается, реакция переходит в режим самоускорения. Последнее явление получило название “тепловой взрыв”. Однако, в силу непрерывной зависимости правых частей системы (1)-(3) от параметра α, между медленными и взрывными режимами должна лежать переходная область, содержащая переходные режимы. При некотором значении параметра α , в дальнейшем называемом критическим, реакция будет протекать максимально долго, не срываясь при этом в режим взрыва, не переходя к медленному режиму, что может являться целью технологического процесса. Действительно, критический режим, отвечающий критическому значению параметра α, не является медленным, так как разогрев в нем существенно больше единицы и не является взрывным, так как рост температуры сравнительно медленный (по отношению к росту температуры при тех же значениях температуры для взрывных режимов).

Определению условий, позволяющих вычислить критическое значение и смоделировать критический режим, были посвящены работы [5, 6]. В следующем разделе приведены основные результаты, полученные в указанных работах. Эти условия были получены в виде системы нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений. Открытым вопросом при этом оставалась задача вычисления критического значения управляющего параметра с помощью этой системы. В настоящей работе эта задача решена, разработан алгоритм вычисления критического значения управляющего параметра, который описан в разделах 4 и 5.

3. Моделирование критического режима

Для простоты изложения рассмотрим случай, когда $\eta_0 = 0$,учитывая при этом, что при $\eta_0 \neq 0$ поправка к начальным условиям траектории-утки находится с помощью интегральных многообразий быстрых движений [5].

Медленная поверхность S системы (1)-(3), изображенная на рис. 1, описывается уравнением

$$\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right)-\alpha(\Theta-\Theta_c)-\delta\Theta=0.$$

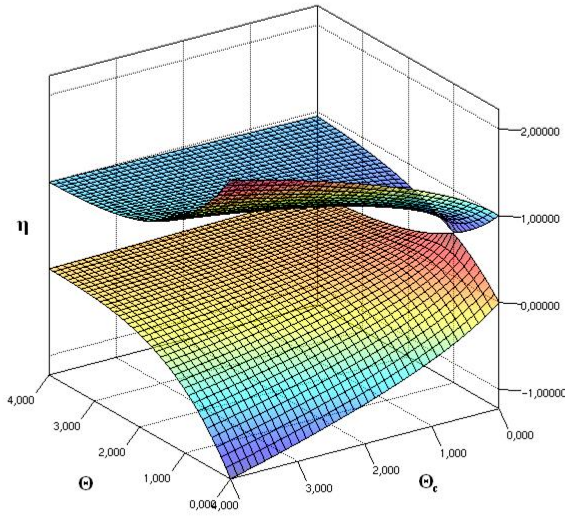

Рис. 1. Медленная поверхность системы (1)-(3).

Эта поверхность представляет собой нулевое приближение (γ =0) медленного интегрального многообразия системы [5, 7–9]. Напомним, что медленным интегральным многообразием сингулярно возмущенной системы называется ее инвариантная поверхность, поток на которой имеет порядок $O(1)$ при $\gamma \to 0$. Вдали от медленной поверхности быстрые переменные системы меняются очень быстро, со скоростью порядка $O(1/\gamma)$ при $\gamma \to 0$.

Пересечение медленной поверхности с поверхностью нерегулярных точек (рис. 2), задаваемой выражением

$$\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right)\frac{1}{(1+\beta\Theta)^2}-\alpha-\delta=0,$$

определяет кривую срыва, которая делит S на устойчивый и неустойчивый листы (рис. 3), в γ – окрестности которых расположены, соответственно, устойчивые (притягивающие) и неустойчивые (отталкивающие) медленные интегральные многообразия системы.

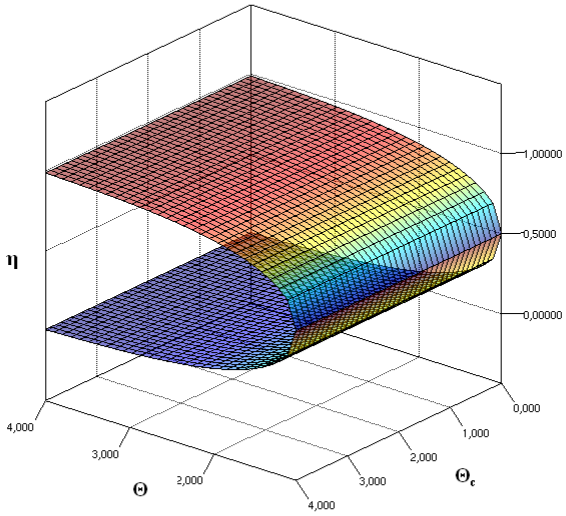

Рис. 2. Поверхность нерегулярных точек системы (1)-(3).

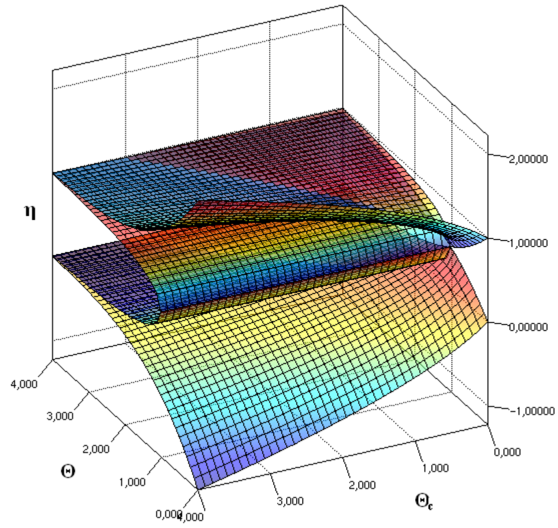

Рис. 3. Пересечение медленной поверхности системы (1)-(3) с поверхностью нерегулярных точек. На линии пересечения происходит смена устойчивости медленного многообразия. Верхний и нижний листы медленной поверхности устойчивы, ее части, заключенные между поверхностью нерегулярных точек – неустойчивы.

Траектории системы (1)-(3), выходя из начальной точки с координатами (4), лежащей в области притяжения устойчивого медленного интегрального многообразия, в зависимости от значения параметра α могут описывать следующие режимы:

- при $\alpha > \alpha^*$ – безопасный медленный режим горения, когда траектория системы двигается к конечной точке, являющейся устойчивым положением равновесия системы, по устойчивому многообразию, не доходя до кривой срыва (рис. 4);
- при $\alpha < \alpha^*$ – режим теплового взрыва, когда траектория системы, дойдя по устойчивому медленному интегральному многообразию до кривой срыва, срывается с него. При этом происходит резкий переход реакции к самоускорению, сопровождаемый стремительным ростом температуры (рис. 5).

При некотором значении параметра $\alpha = \alpha^*$ удается “склеить” устойчивое и неустойчивое медленные интегральные многообразия в некоторой точке кривой срыва. В этом случае траектория системы содержит участки медленного движения, лежащие как на устойчивом, так и на неустойчивом интегральных многообразиях, т. е. она является траекторией-уткой (рис. 6) [5, 7–9].

Траектория-утка системы описывает критический режим, разграничивающий область медленных и взрывных режимов, так как отклонение от значения α^* приводит к разрушению склейки устойчивого и неустойчивого медленных интегральных многообразий с последующим переходом реакции либо в медленный режим (когда траектория системы разворачивается по устойчивому многообразию от кривой срыва), либо в режим теплового взрыва (когда траектория, пересекая кривую срыва, срывается с медленного многообразия и стремительно удаляется от него) [10–12].

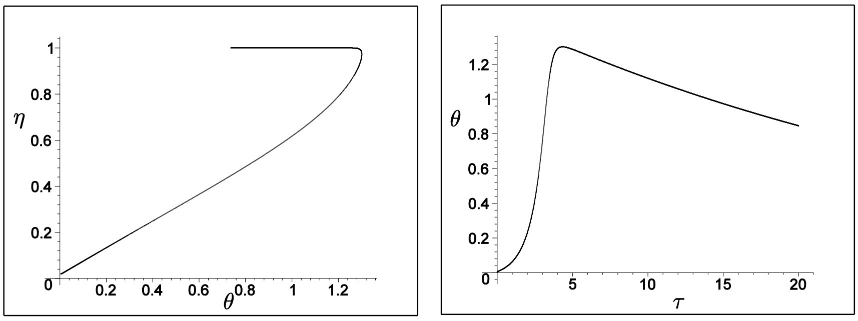

Рис. 4. Траектория (слева) и температурно-временная характеристика (справа) в случае режима медленного выгорания: $\alpha = 3$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}001$, $\gamma_c = 0{,}7$, $\bar{\eta}_0 = 0{,}02$, $\delta = 0{,}02$.

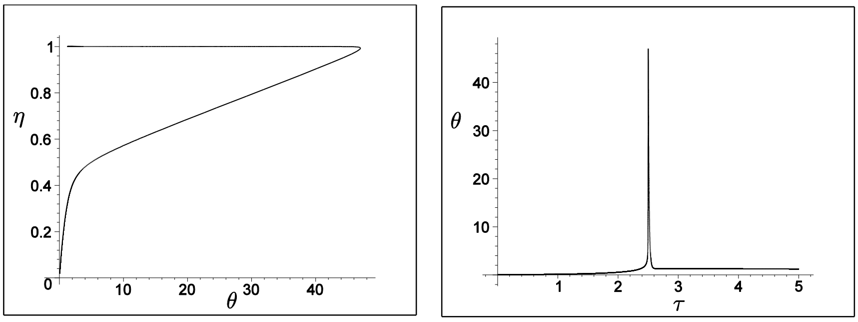

Рис. 5. Траектория (слева) и температурно-временная характеристика (справа) в случае теплового взрыва: $\alpha = 0.7$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}001$, $\gamma_c = 0{,}7$, $\bar{\eta}_0 = 0{,}02$, $\delta = 0{,}02$.

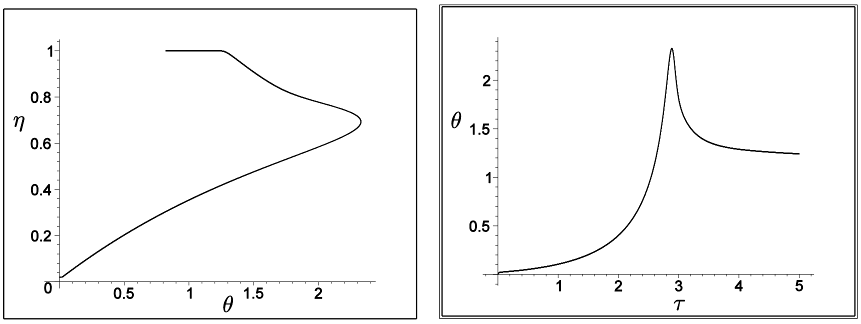

Рис. 6. Траектория-утка (слева) и температурно-временная характеристика (справа) в случае критического режима: $\alpha = 0{,}949$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}001$, $\gamma_c = 0{,}7$, $\bar{\eta}_0 = 0{,}02$, $\delta = 0{,}02$.

Чтобы найти критическое значение параметра $\alpha = \alpha^*$ и соответствующую ему траекторию-утку в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра γ:

$$\alpha^* = \alpha_0 + \gamma\alpha_1 + o(\gamma),$$

$$\Theta(\eta,\gamma) = \varphi_0(\eta) + \gamma\varphi_1(\eta) + o(\gamma), \qquad (5)$$

$$\Theta_c(\eta,\gamma) = \psi_0(\eta) + \gamma\psi_1(\eta) + o(\gamma),$$

воспользуемся обычным приемом исключения независимой переменной. При этом система (1)-(3) примет вид

$$\gamma\frac{d\Theta}{d\eta}\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right) = \eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right) - \alpha(\Theta-\Theta_c) - \delta\Theta,$$

$$\gamma_c\frac{d\Theta_c}{d\eta}\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right) = \alpha(\Theta-\Theta_c).$$

Подставляя разложения (5) в эти уравнения инвариантности, получим систему:

$$\gamma(\varphi_0' + \gamma\varphi_1')\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\varphi_0}{1+\beta\varphi_0}\right)\left[1+\gamma\frac{\varphi_1}{(1+\beta\varphi_0)^2}\right] = \exp\left(\frac{\varphi_0}{1+\beta\varphi_0}\right)\left[1+\gamma\frac{\varphi_1}{(1+\beta\varphi_0)^2}\right] -$$

$$-(\alpha_0+\gamma\alpha_1)\big(\varphi_0-\psi_0+\gamma(\varphi_1-\psi_1)\big) - \delta(\varphi_0+\gamma\psi_1) + o(\gamma), \qquad (6)$$

$$\gamma_c(\varphi_0' + \gamma\varphi_1')\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\varphi_0}{1+\beta\varphi_0}\right)\left[1+\gamma\frac{\varphi_1}{(1+\beta\varphi_0)^2}\right] =$$

$$= (\alpha_0 + \gamma\alpha_1)\big(\varphi_0 - \psi_0 + \gamma(\varphi_1 - \psi_1)\big) + o(\gamma). \quad (7)$$

Полагая в системе (6), (7) $\gamma = 0$, получим следующие соотношения:

$$\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\varphi_0}{1+\beta\varphi_0}\right) - \alpha_0(\varphi_0 - \psi_0) - \delta\varphi_0 = 0, \quad (8)$$

$$\gamma_c\varphi_0'\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\varphi_0}{1+\beta\varphi_0}\right) = \alpha_0(\varphi_0 - \psi_0). \quad (9)$$

Из уравнений кривой срыва, с учетом (5), следует выражение

$$\eta^*\,(1-\eta^*)\exp\left(\frac{\varphi_0^*}{1+\beta\varphi_0^*}\right)\frac{1}{(1+\beta\varphi_0^*)^2} - (\alpha_0 + \delta) = 0, \quad (10)$$

где точка $(\eta^*, \varphi^*, \psi^*)$ – точка склейки медленного интегрального многообразия.

Дифференцируя уравнение (8) по переменной η, с учетом выражения (10), получаем еще одно условие в точке склейки:

$$(1-2\eta^*)\exp\left(\frac{\varphi_0^*}{1+\beta\varphi_0^*}\right) + \alpha_0\psi_0'^* = 0, \;\; \psi_0'^* = \psi_0'(\eta^*). \quad (11)$$

Таким образом, для вычисления нулевого приближения критического значения параметра α и соответствующей этому значению траектории-утки получены выражения (8)-(11).

Далее, для нахождения первого приближения критического значения параметра α, приравниваем в системе (6), (7) коэффициенты при γ в первой степени. В результате получим:

$$\varphi_0\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\varphi_0}{1+\beta\varphi_0}\right) = \left[\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\varphi_0}{1+\beta\varphi_0}\right)\frac{\varphi_1}{(1+\beta\varphi_0)^2} - (\alpha_0+\delta)\right]\varphi_1 + \alpha_0\psi_1 - \alpha_1(\varphi_0 - \psi_0), \quad (12)$$

$$\eta\,(1-\eta)\exp\left(\frac{\varphi_0}{1+\beta\varphi_0}\right)\left[\varphi_0' + \gamma_c\psi_1' + \frac{\varphi_1(\gamma_c\psi_0'-1)}{(1+\beta\varphi_0)^2}\right] = -\delta\varphi_1. \quad (13)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\varphi_0^* - \psi_0^*}\left[\alpha_0\psi_1'^* - \varphi_0'^*\eta^*\,(1-\eta^*)\exp\left(\frac{\varphi_0^*}{1+\beta\varphi_0^*}\right)\right]. \quad (14)$$

Здесь $\varphi_0'^* = \varphi_0'(\eta^*)$.

Итак, выражения (12)-(14) определяют первые приближения критического значения параметра α и отвечающей ему траектории-утки. Получить аналитически значения α_0 и α_1 , используя полученные для них выражения, не представляется возможным. Чтобы найти критическое значение управляющего параметра из выражений (8)-(14) нужно применить численные методы. Разработка алгоритма нахождения критического значения управляющего параметра и является нашей дальнейшей целью.

4. Нахождение точки склейки интегральных многообразий

Отметим, что координаты точки склейки интегральных многообразий на кривой срыва и значение α_0 может быть найдено из условий самопересечения медленной кривой, которые в нашем случае условия имеют вид

$$\eta^*(1-\eta^*)\exp\left(\frac{\Theta^*}{1+\beta\Theta^*}\right) - \alpha\Theta^* + \frac{\alpha}{\gamma_c}\eta^* = 0, \quad (15)$$

$$(1-2\eta^*)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right) + \frac{\alpha}{\gamma_c} = 0, \quad (16)$$

$$\eta^*(1-\eta^*)\exp\left(\frac{\Theta^*}{1+\beta\Theta^*}\right)\frac{1}{(1+\beta\Theta^*)^2} - \alpha = 0. \quad (17)$$

Исключая экспоненту из (15) и (17), получим соотношение

$$\eta^* = \gamma_c\Theta^* - (1+\beta\Theta^*)^2\gamma_c. \quad (18)$$

Аналогично, исключая экспоненту из (15) и (16), получим соотношение

$$(1-2\eta^*)(\Theta^*-\gamma_c^{-1}\eta^*)+\gamma_c^{-1}\eta^*(1-\eta^*)=0.$$

Из последнего соотношения имеем

$$\gamma_c(1+\beta\Theta^*)^4=\gamma_c\Theta^{*2}-\Theta^*. \quad (19)$$

Из уравнений (18) и (19) находим значения Θ^*, η^*, а из (16) вычисляем

$$\alpha_0=\gamma_c(2\eta^*-1)\exp\left(\frac{\Theta^*}{1+\beta\Theta^*}\right). \quad (20)$$

Используя малость параметра β, из уравнения (19) можно аналитически найти Θ^* в виде асимптотического разложения по параметру β: $\Theta^*=\Theta_{00}^*+\beta\Theta_{01}^*+o(\beta)$. Аналогичные разложения можно записать и для α_0 и η^*. Так, для $\beta=0$ из (18)-(20) получим следующие выражения:

$$\Theta_{00}^*=\frac{1}{2}\left(\gamma_c^{-1}+\sqrt{4+\gamma_c^{-2}}\right),$$

$$\eta_{00}^*=\gamma_c(\Theta_{00}-1), \quad (21)$$

$$\alpha_{00}=\frac{\exp(\Theta_{00}^*)}{2+\sqrt{4+\gamma_c^{-2}}}.$$

5. Алгоритм вычисления критического значения управляющего параметра

Опишем алгоритм решения системы нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений (8)-(11) с начальными условиями, полученными из (4) с учетом разложений (5):

$$\eta(0)=\frac{\eta_0}{1+\eta_0}=\bar{\eta}_0, \varphi_0(0)=\varphi_0.$$

Рассмотрим численное решение данной системы. Для этого выразим ψ_0 из уравнения (8):

$$\psi_0=\phi_0\left(1+\frac{\delta}{\alpha_0}\right)-\frac{\eta(1-\eta)}{\alpha_0}\exp\left(\frac{\phi_0}{1+\beta\phi_0}\right).$$

Далее, найдем производную ψ_0' :

$$\psi_0'=\frac{1}{\alpha_0}\left[\phi_0'(\alpha_0+\delta)+(1-2\eta)\exp\left(\frac{\phi_0}{1+\beta\phi_0}\right)-\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\phi_0}{1+\beta\phi_0}\right)\frac{\phi_0'}{(1+\beta\phi_0)^2}\right].$$

Далее, подставим найденные значения ψ_0 и ψ_0', в уравнение (9):

$$\phi_0'=\left(\frac{\alpha_0}{\gamma_c}-\frac{\alpha_0\delta\phi_0}{\gamma_c\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\phi_0}{1+\beta\phi_0}\right)}+\frac{(1-2\eta)}{\eta(1-\eta)}\exp\left(\frac{\phi_0}{1+\beta\phi_0}\right)\right)\Big/\left(\alpha_0+\delta-\frac{\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\phi_0}{1+\beta\phi_0}\right)}{(1+\beta\phi_0)^2}\right). \quad (22)$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\phi=\phi_0(\eta)$, где η – независимая переменная, α_0 – параметр.

Возьмем конкретное значение параметра α_0 и решим данное уравнение численно с использованием метода Рунге-Кутта 4 порядка. Метод Рунге-Кутта обладает значительной точностью и, не смотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью электронных вычислительных машин. Кроме того, важным преимуществом данного метода является возможность применения «переменного шага».

Далее, для вычисления координат точки склейки найдем η^* и φ_0^*, используя уравнения (10) и (11):

$$\eta^*(1-\eta^*)\exp\left(\frac{\phi_0{}^*}{1+\beta\phi_0{}^*}\right)\frac{1}{(1+\beta\phi_0^*)^2}-(\alpha_0+\delta)=0,$$

$$(1-2\eta^*)\exp\left(\frac{\phi_0{}^*}{1+\beta\phi_0{}^*}\right)+\alpha_0\frac{\eta^*(1-\eta^*)\exp\left(\frac{\phi_0{}^*}{1+\beta\phi_0{}^*}\right)-\delta\phi_0{}^*}{\gamma_c\eta^*(1-\eta^*)\exp\left(\frac{\phi_0{}^*}{1+\beta\phi_0{}^*}\right)}=0.$$

Полученную систему нелинейных уравнений также можно решить численно, применяя для этого воспользоваться один из итерационных методов. Отметим, что в редких случаях для решения такой системы удается применить метод последовательного исключения неизвестных и свести решение исходной задачи к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным. Значения других неизвестных величин находятся соответствующей подстановкой в конкретные выражения. Однако в подавляющем большинстве случаев для решения систем нелинейных уравнений используются итерационные методы. Найденное значение η^* подставим в выражение для ϕ_0 и получим некоторое новое значение ϕ_0^{**}. Минимизируя погрешность между ϕ_0^* и ϕ_0^{**}, мы можем определить значение α_0 с заданной точностью.

Аналогичным образом из (12)-(14) находится значение α_1, за исключением того, что значение α_0 на этом этапе уже известно.

Для реализации разработанного алгоритма написана программа на языке Java. Для проверки корректности разработанного алгоритма и предложенного программного продукта проведем сравнение результатов вычисления значений α_0, полученных при его реализации численными методами, и аналитически, используя выражения (18)-(20). Рассмотрим случай $\beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$. В этом случае для аналитического вычисления α_0 воспользуемся выражениями (21). В качестве начального условия для уравнения (22) возьмем $\varphi_0(0{,}6) = 1{,}7$. Полученные результаты представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Значения α_0, найденные аналитическим методом и программой, написанной на Java

γ_c	Аналитический метод	Численный метод
0,6	1,837200	1,837291
0,7	1,566012	1,566038
0,8	1,393921	1,393923
0,9	1,275978	1,275919
1,1	1,125980	1,125923
1,2	1,075605	1,075623
1,3	1,035258	1,035253

Из таблицы видно, что погрешность результатов, полученных численным методом, составляет порядка 10^{-4}, что демонстрирует хорошую точность вычисления, а совпадение с аналитическим расчетом, подтверждает корректность разработанного программного продукта.

6. Заключение

В данной работе исследована математическая модель фильтрационного горения горючего газа в случае автокаталитической реакции. Показано, что критические явления в рассмотренной модели моделируются траекторией-уткой. Критический режим является своеобразным водоразделом между безопасными процессами и режимами теплового взрыва. Установлено, что используя в качестве управляющего воздействия параметр, характеризующий теплоотвод из реакционной фазы во внешнюю среду, можно управлять процессом горения, задавая нужный режим.

На основе комбинации аналитических методов геометрической теории сингулярных возмущений и численных методов было разработано программное обеспечение, которое позволяет вычислять критические значения управляющего параметра в рассмотренной модели. Разработанное программное обеспечение является математическим пакетом, который может быть использован при изучении критических явлений в динамических системах и определении критических значений управляющих параметров в подобных прикладных задачах.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта № 16-41-630529 и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013–2020).

Литература

[1] Абрамов, В.Г. Теория теплового взрыва: от Семенова Н.Н. до наших дней / В.Г Абрамов, В.В. Барзыкин, А.Г. Мержанов // Химическая физика. – 1996. –Т. 15. – №6. – С. 3-43.

[2] Зельдович, Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. – М.: Наука, 1980. – 480 с.

[3] Бабушок, В.И. Тепловое воспламенение в инертной пористой среде / В.И. Бабушок, В.М. Гольдштейн, А.С. Романов, В.С. Бабкин // Физика горения и взрыва. – 1992. – Т. 28. – №4. – С. 20-45.

[4] Babushok, V.I., Critical conditions for thermal explosion with reactant consumption / V.I Babushok, V.M Gol'dshtein, and V.A. Sobolev // Combust. Sci. and Tech. – 1990. – Vol. 70. – P. 81-89.

[5] Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. – Москва: Физматлит, 2010. – 319 с.

[6] Щепакина, Е.А. Критические условия самовоспламенения в пористой среде / Е.А. Щепакина // Химическая физика. – 2001. – Т. 20. – № 7. – С. 3-9.

[7] Щепакина, Е.А. Интегральные поверхности со сменой устойчивости и траектории-утки / Е.А. Щепакина, В.А. Соболев // Известия РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. – 1997. – Т. 1, № 3. – С. 151-175.

[8] Щепакина, Е.А. Притягивающе-отталкивающие интегральные поверхности в задачах горения // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14, № 3. – С. 30-42.

[9] Shchepakina, E. Black swans and canards in self-ignition problem // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2003. – T. 4, № 1. – C. 45-50.
[10] Соболев, В.А. Самовоспламенение запыленных сред / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина // Физика горения и взрыва. – 1993. – № 3. – С. 133-136.
[11] Щепакина, Е.А. Сингулярно возмущенные модели горения в многофазных средах // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 142-157.
[12] Schneider, K. A new type of traveling wave / K. Schneider, E. Shchepakina, and V. Sobolev // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2003. – Vol. 26. – P. 1349-1361.