

# Расчет и анализ распределения поля лазерного пучка после реальной оптической системы

М.Л. Галкин<sup>1</sup>, П.А. Носов<sup>1</sup>, М.С. Ковалёв<sup>1</sup>, Н.М. Вереникина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1, Москва, Россия, 105005

**Аннотация.** При проектировании высококачественных оптических систем необходимо рассчитывать реальное распределение поля формируемого пучка. В работе решение данной задачи рассматривается методом скалярной теории дифракции. Для вычисления дифракционного интеграла и визуализации результатов используется программный пакет Математика (Wolfram Mathematica). Абберационный анализ лазерных оптических систем и моделирование в программе Математика выходного распределения поля показали существенное искажение распределения поля и отклонение пространственных параметров пучка от идеального, описываемого аналитическими выражениями.

## 1. Введение

В настоящее время выпускается большое количество лазеров, которые широко используются в науке, технике, промышленности и других отраслях народного хозяйства. Однако очень часто при проектировании лазерных оптико-электронных приборов оптики-расчётчики учитывают только длину волны излучения, расходимость и диаметр пучка на выходе лазера. Данные параметры не полностью характеризуют лазерное излучение, сформированное оптическим резонатором. Об этом также свидетельствует то обстоятельство, что в паспорте на лазер отсутствуют, за редким исключением, оптическая схема резонатора и его конструктивные параметры, которые и определяют весь набор параметров выходного излучения. Тем не менее, знание всех параметров излучения лазера необходимо для корректного расчёта формирующей лазерной оптической системы (ЛОС). Правильный расчёт ЛОС, как показывает практика, позволяет повысить качество формируемого пучка и технические характеристики разрабатываемых лазерных приборов и систем за счёт проектирования оптического блока с меньшими габаритами, массой, используя при этом источник лазерного излучения меньшей мощности, т.е. снизить электропотребление [1-5].

Для расчёта оптических систем различных типов разработаны соответствующие методики [2,3,6-8]. При этом в оптике широко распространены дифракционные методы расчёта. Также полный анализ свойств лазерного излучения, формируемого оптическими резонаторами, позволяют провести дифракционные методы [1,2]. При разработке высококачественных ЛОС окончательная оценка качества формируемого оптической системой пучка также должна проводиться дифракционными методами. Поскольку численное решение дифракционного интеграла является достаточно трудоёмкой задачей, в инженерной практике важное значение имеют приближённые методы расчёта, которые при разумных допущениях позволяют

существенно упростить рассматриваемую задачу. Такой подход позволяет получить приближённые аналитические выражения для проведения оценочного расчёта.

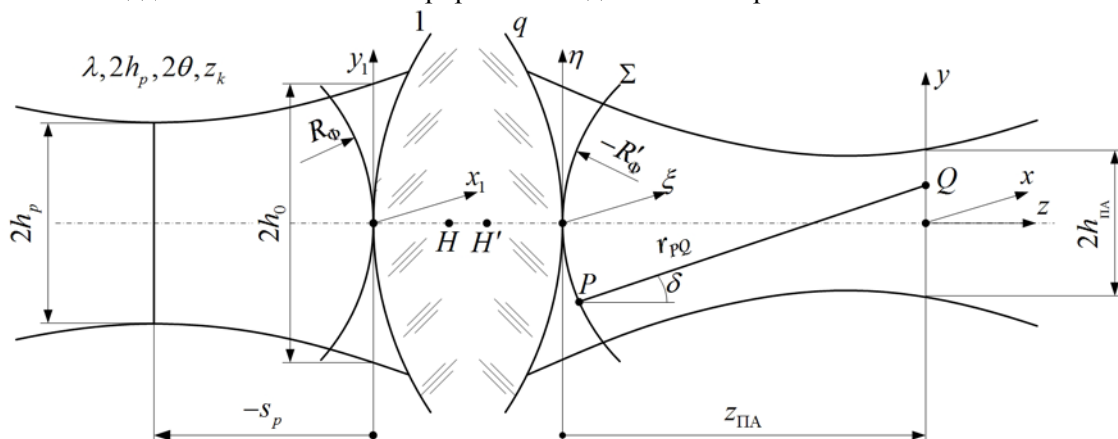
Принципиально важным для решения многих задач оптики является вычисление интеграла от быстро осциллирующих функций. Это приводит к необходимости применения специальных численных методов и алгоритмов. В работе для вычисления дифракционного интеграла используется программный пакет Математика (Wolfram Mathematica), который позволяет успешно решить указанную проблему. Помимо результатов прямого вычисления дифракционного интеграла для нахождения параметров формируемого ЛОС пучка с помощью программы Математика в работе приводятся приближённые аналитические выражения, позволяющие провести анализ абберационных искажений лазерного пучка на выходе оптической системы.

## 2. Основные расчётные соотношения

Рассматриваемый в работе метод расчёта распределения комплексной амплитуды поля лазерного излучения на выходе оптической системы с учётом её аббераций базируется на скалярной теории дифракции. Согласно формуле Релея-Зоммерфельда распределение комплексной амплитуды поля  $\psi'$  после ЛОС в точке  $Q$  с координатами  $(x, y, z_{\text{ПА}})$  определяется следующим выражением [9] (см. рис. 1):

$$\psi'(x, y, z_{\text{ПА}}) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \psi(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr_{PQ})}{r_{PQ}} \cos \delta d\Sigma, \quad (1)$$

где  $\psi$  – распределение комплексной амплитуды поля лазерного пучка на выходной опорной сфере  $\Sigma$ ;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны излучения;  $r_{PQ}$  – расстояние между произвольной точкой  $P$  на выходной опорной сфере, где рассчитывается функция волновой абберации ЛОС, и точкой анализа  $Q$ ;  $\delta$  – угол между  $r_{PQ}$  и нормалью к  $\Sigma$  в точке  $P$ ;  $d\Sigma$  – элемент площади  $\Sigma$  в точке  $P$ . Интегрирование ведётся по поверхности  $\Sigma$ .



**Рисунок 1.** Преобразование лазерного пучка реальной ЛОС:  $2h_p, 2\theta, z_k$  – диаметр перетяжки, угловая расходимость и параметр конфокальности преобразуемого пучка;  $s_p$  – положение перетяжки относительно первой поверхности ЛОС;  $H, H'$  – главные точки ЛОС;  $2h_0$  – диаметр пучка моды  $TEM_{mn}$  на входе ЛОС, определяемый методом моментов [10] ( $m, n$  – поперечные индексы моды,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Распределение комплексной амплитуды поля эрмит-гауссова пучка на выходной опорной сфере  $\Sigma$  после реальной ЛОС с точностью до постоянного фазового множителя определяется следующим выражением [11]:

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{1}{\beta'} a \left( \frac{\xi}{\beta'}, \frac{\eta}{\beta'} \right) \exp[ikW(\xi, \eta)]. \quad (2)$$

Здесь  $a$  – распределение амплитуды поля эрмит-гауссова пучка моды  $TEM_{mn}$  на входе ЛОС в плоскости  $x_1y_1$ ;  $\beta'$  – коэффициент, характеризующий отношение размера лазерного пучка в плоскостях  $\xi\eta$  и  $x_1y_1$ ; волновая абберационная функция реальной ЛОС от поперечных координат  $\xi\eta$  на выходной опорной сфере  $\Sigma$  имеет вид (см. рисунок 1):

$$W(\xi, \eta) = -\frac{\rho^2}{2f'} (\chi + \alpha\rho^2 + \beta\rho^4 + \gamma\rho^6 + \dots), \quad (3)$$

где  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ ;  $f'$  – заднее фокусное расстояние ЛОС; коэффициенты разложения  $\chi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  характеризуют, соответственно, дефокусировку и абберации ЛОС 3-го, 5-го и 7-го порядков.

Приведённые выражения позволяют провести численное моделирование распространения лазерного пучка через реальную оптическую систему и построить функции искажения распределений амплитуды и фазы поля, а также рассчитать отклонение пространственных параметров реального пучка от идеального, сформированного идеальной (безабберационной) ЛОС. При этом важно учитывать отличия расчёта абберационных искажений оптической системы лазерного и классического излучений. Во-первых, лазерный пучок описывается только косыми лучами (так называемый, лучевой пакет) [3,12]; во-вторых, радиусы кривизны входной и выходной опорных сфер рассчитываются по формулам лазерной оптики [3] через парааксиальные параметры преобразуемого и преобразованного пучков соответственно:  $R_\Phi = -(z_k^2 + s_p^2)/s_p$ ,  $R'_\Phi = (z_k'^2 + s_p'^2)/s_p'$ , где  $z_k'$  – параметр конфокальности пучка на выходе идеальной ЛОС;  $s_p'$  – положение выходной перетяжки относительно последней поверхности ЛОС; выражения для  $R_\Phi$  и  $R'_\Phi$  приведены согласно правилу знаков, принятому в лазерной оптике.

Чтобы получить приближённое аналитическое выражение для распределения комплексной амплитуды поля преобразованного ЛОС пучка в дифракционном интеграле (1) необходимо сделать следующие допущения и преобразования. Во-первых, угловой коэффициент  $\cos\delta$  считать равным единице и в знаменателе подынтегрального выражения  $r_{PQ} \approx z_{\text{ПА}}$ . Во-вторых, в фазовом множителе подынтегрального выражения  $r_{PQ}$  представить в виде степенного ряда Тейлора, учитывающего члены до восьмого порядка малости, и провести экономизацию полученного выражения с помощью полиномов Чебышева на каноническом отрезке  $[0;+1]$ . При этом апертура компонентов ЛОС считается много больше (в 2,5...3,0 раза) размера пучка. В результате можно выделить главную часть абберационных членов (квадратичную), в которой учтена 1/2, 15/32, 7/16 части аббераций ЛОС 3-го, 5-го и 7-го порядков [11]:

$$\chi_{\text{эв}} = \chi + h_{\text{max}}^2 \left( \alpha + \frac{15}{16} \beta h_{\text{max}}^2 + \frac{7}{8} \gamma h_{\text{max}}^4 \right),$$

где  $2h_{\text{max}}$  – световой диаметр последней преломляющей поверхности ЛОС.

После аналитического интегрирования дифракционного интеграла получено распределение поля и обобщённые зависимости лазерного пучка с учётом аббераций ЛОС. Поскольку они учитывают основную часть аббераций ЛОС, то они описывают, соответственно, абберационный эрмит- и лагерь-гауссовы пучки. Зависимости для огибающей произвольной поперечной моды  $TEM_{mn}$  ( $h'_{mn \text{ аб}}$ ) и радиуса кривизны волнового фронта ( $R'_{\Phi \text{ аб}}$ ) от положения плоскости анализа  $z_{\text{ПА}}$  имеют вид [11]:

$$h'_{mn \text{ аб}}(z_{\text{ПЛА}}) = \frac{\kappa_{mn}}{\mu_1} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \frac{B}{A^2 + B^2}} \sqrt{1 + \left[ \frac{z_{\text{ПЛА}} + A/(A^2 + B^2)}{B/(A^2 + B^2)} \right]^2},$$

$$R'_{\Phi \text{ аб}}(z_{\text{ПЛА}}) = \frac{(z_{\text{ПЛА}}A + 1)^2 + (z_{\text{ПЛА}}B)^2}{\mu_1 \left\{ \mu_1 \cdot (A + 1/z_{\text{ПЛА}}) - z_{\text{ПЛА}} \left[ (A + 1/z_{\text{ПЛА}})^2 + B^2 \right] \right\}}. \quad (4)$$

Здесь  $\kappa_{mn}$  – коэффициент, определяющий увеличение размера пятна высшей поперечной моды  $TEM_{mn}$  по сравнению с основной  $TEM_{00}$  (рассчитывается методом моментов [10]). В приведённых соотношениях абберации ЛОС входят в параметр  $A$  в виде коэффициента  $\chi_{\text{эКВ}}$  при полиноме Чебышева 1-го порядка:

$$A = A(\chi, \alpha, \beta, \gamma, z_{\text{ПЛА}}) = \frac{\mu_1 \mu_3 - 1}{z_{\text{ПЛА}}} - \frac{\chi_{\text{эКВ}}}{f'}, \quad B = \frac{\lambda \kappa_{mn}^2}{\pi (\beta' h_0)^2},$$

$$\mu_1 = \mu_1(z_{\text{ПЛА}}) = 1 - \frac{u_{\text{max}}^2}{4z_{\text{ПЛА}}^2} \left( 1 - \frac{15 u_{\text{max}}^2}{32 z_{\text{ПЛА}}^2} + \frac{35 u_{\text{max}}^4}{128 z_{\text{ПЛА}}^4} \right),$$

$$\mu_3 = \mu_3(z_{\text{ПЛА}}) = 1 + \frac{z_{\text{ПЛА}}}{R'_{\Phi}} + \frac{h_{\text{max}}^2}{4R'_{\Phi}{}^2} \left[ 1 + \frac{z_{\text{ПЛА}}}{R'_{\Phi}} + \frac{15 h_{\text{max}}^2}{32 R'_{\Phi}{}^2} \left( 1 + \frac{z_{\text{ПЛА}}}{R'_{\Phi}} \right) + \frac{7 h_{\text{max}}^4}{128 R'_{\Phi}{}^4} \left( 1 + \frac{5z_{\text{ПЛА}}}{R'_{\Phi}} \right) \right],$$

$$u_{\text{max}}^2 = u_{\text{max}}^2(z_{\text{ПЛА}}) = (h_{\text{max}} + h'_{\text{max}})^2 + \left[ z_{\text{ПЛА}} + R'_{\Phi} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{h_{\text{max}}^2}{R'_{\Phi}{}^2}} \right) \right]^2 - z_{\text{ПЛА}}^2,$$

В приведённых формулах величины  $h_{\text{max}}$  и  $h'_{\text{max}}$  характеризуют максимальный размер области (её полудиаметр) на выходной опорной сфере  $\Sigma$  и в плоскости анализа выходного поля, в которых сосредоточена основная часть энергии заданной поперечной моды пучка.

Из формул (4) следует, что огибающая преобразованного ЛОС лазерного пучка с учётом аббераций уже не является поверхностью второго порядка (гиперболоид вращения), как в случае паракиального приближения.

Основные пространственные параметры абберационного пучка (положение перетяжки и её размер, угловая расходимость) и параметр качества пучка  $M^2$  могут быть рассчитаны по следующим формулам [11]:

$$s'_{p \text{ аб}} = -\frac{A(s'_{p \text{ аб}})}{A^2(s'_{p \text{ аб}}) + B^2}, \quad h'_{p \text{ mn аб}} = \frac{\kappa_{mn}}{\mu_1(s'_{p \text{ аб}})} \sqrt{\frac{\lambda B}{\pi [A^2(s'_{p \text{ аб}}) + B^2]}},$$

$$2\theta'_{mn \text{ аб}} = 2\kappa_{mn} \sqrt{\frac{\lambda(A_{\infty}^2 + B^2)}{\pi B}}, \quad M^2 = \frac{\kappa_{mn}^2}{\mu_1(s'_{p \text{ аб}})} \sqrt{\frac{A_{\infty}^2 + B^2}{A^2(s'_{p \text{ аб}}) + B^2}}. \quad (5)$$

$$\text{где } A_{\infty} = -\frac{\chi_{\text{эКВ}}}{f'} + \frac{1}{R'_{\Phi}} \left[ 1 + \frac{h_{\text{max}}^2}{4R'_{\Phi}{}^2} \left( 1 + \frac{15 h_{\text{max}}^2}{32 R'_{\Phi}{}^2} + \frac{35 h_{\text{max}}^4}{128 R'_{\Phi}{}^4} \right) \right].$$

Оценка порядка величин  $A$  и  $B$  даёт:  $A \sim 1/f'$ ,  $B = \lambda \kappa_{mn}^2 / [\pi (\beta' h_0)^2] = \lambda l^2 / \pi f'^2$  ( $l = f' \kappa_{mn} / \beta' h_0$ ) и с точностью до множителя  $l^2/\pi$  пропорциональна  $\lambda/f'^2$ , т.е. практически выполняется неравенство  $B \ll A$ . Тогда формулы (5) упрощаются:

$$s'_{p \text{ аб}} = -\frac{1}{A(s'_{p \text{ аб}})}, \quad h'_{p \text{ mn аб}} = \beta' h_0 \frac{B}{\mu_1(s'_{p \text{ аб}}) |A(s'_{p \text{ аб}})|}, \quad 2\theta'_{mn \text{ аб}} = 2\beta' h_0 |A_{\infty}|, \quad M^2 = \frac{\kappa_{mn}^2}{\mu_1(s'_{p \text{ аб}})} \left| \frac{A_{\infty}}{A(s'_{p \text{ аб}})} \right|. \quad (6)$$

Согласно формуле (6) для диаметра и положения выходной перетяжки величина  $A$ , учитывающая aberrации ЛОС, находится в знаменателе, а для угловой расходимости – в числителе. Поэтому наличие aberrаций по-разному влияет на параметры пучка на выходе ЛОС.

### 3. Пример анализа искажений на выходе реальной ЛОС

Рассмотрим преобразование гауссова пучка ( $\lambda = 0,63$  мкм,  $h_p = 0,63$  мм,  $s_p = -35,0$  мм,  $2\theta = 0,63$  мрад,  $\kappa_{00} = 1$ ). Конструктивные параметры ЛОС с фокусным расстоянием  $f' = 14,15$  мм приведены в таблице 1.

**Таблица 1.** Конструктивные параметры фокусирующей ЛОС.

$r$ , мм <sup>а</sup>	$d$ , мм <sup>б</sup>	$n$ <sup>в</sup>
9,146		
	3,0	1,6105 (ТК16)
-4,712		
	1,73	1,7347 (ТФ4)
-22,632		

<sup>а</sup>  $r$  – радиусы кривизны преломляющих поверхностей оптических элементов;

<sup>б</sup>  $d$  – толщины оптических элементов и воздушных промежутков;

<sup>в</sup>  $n$  – показатель преломления среды для рабочей длины волны лазерного излучения 0,63 мкм.

Для рассматриваемой ЛОС продольное увеличение равно  $\alpha_T = 5 \cdot 10^{-5}$ , т.е. она относится к фокусирующему типу. Пространственные параметры пучка на выходе идеальной ЛОС имеют значения: параметр конфокальности пучка  $z'_k = 0,1$  мм, положение перетяжки относительно последней поверхности ЛОС  $s'_p = 11,78$  мм, полудиаметр выходной перетяжки  $h'_p = 4,49$  мкм, угловая расходимость  $2\theta' = 0,09$  рад. Полудиаметр и положение перетяжки пучка, определённые путём расчёта в программном пакете Математика дифракционного интеграла (1) для идеальной ЛОС, равны 4,50 мкм и 11,78 мм, т.е. совпадают с результатами расчёта по аналитическим формулам.

Чтобы оценить искажения поля выходного пучка методом лучевого пакета была рассчитана волновая aberrация ЛОС [11]. Коэффициенты разложения функции волновой aberrации имеют значения:  $\chi = 4,17 \cdot 10^{-7}$ ,  $\alpha = -3,47 \cdot 10^{-3}$  мм<sup>-2</sup>,  $\beta = -3,52 \cdot 10^{-4}$  мм<sup>-2</sup>,  $\gamma = -2,06 \cdot 10^{-5}$  мм<sup>-6</sup>. Перепад функции волновой aberrации ЛОС равен:  $\Delta W = W_{\max} - W_{\min} = 0,71\lambda$ .

Полудиаметр и положение и выходной перетяжки пучка, а также параметр пучка  $M^2$ , рассчитанные по формулам (5), соответственно равны 4,52 мкм, 11,85 мм и 1,003. Полудиаметр и положение перетяжки пучка, определённые путём расчёта в программном пакете Математика дифракционного интеграла (1) с учётом (2) и (3), имеют значения 4,55 мкм и 11,81 мм.

Для ЛОС с таким же фокусным расстоянием 14,15 мм, но с другими конструктивными параметрами, при которых коэффициенты разложения функции волновой aberrации  $\chi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  положительные, перетяжка выходного пучка смещается влево относительно параксиального положения, т.е. находится на расстоянии  $s'_p < 11,78$  мм. Этот вывод согласуются с результатами расчёта положения выходной перетяжки по формуле (5). Для примера, при  $\chi = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha = 3,5 \cdot 10^{-3}$  мм<sup>-2</sup>,  $\beta = 4 \cdot 10^{-4}$  мм<sup>-2</sup>,  $\gamma = 2,1 \cdot 10^{-5}$  мм<sup>-6</sup> положение выходной перетяжки, рассчитанное по формуле (6), равно 11,71 мм, а в результате расчёта дифракционного интеграла – 11,73 мм. Когда коэффициенты разложения функции волновой

абберации ЛОС имеют разные знаки, однозначный вывод о направлении смещения выходной перетяжки сделать нельзя.

#### 4. Заключение

Анализ распространения лазерного пучка через оптическую систему при учёте её aberrаций показал, что расчёт распределения поля и пространственных параметров пучка по приближённым формулам согласуется с результатами прямого вычисления дифракционного интеграла. Отличие вызвано учётом всех aberrаций ЛОС и свободного пространства, а также повышенной точностью вычисления дифракционного интеграла в программном пакете Математика. Кроме того, отклонение пространственных параметров пучка (в частности, смещение выходной перетяжки относительно её параксиального положения) определяется функцией волновой aberrации ЛОС. Полученные в работе результаты следует учитывать при проектировании лазерной оптики для прецизионных лазерных технологий.

#### 5. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-08-00936 а.

#### 6. Литература

- [1] Пахомов, И.И. Опτικο-электронные квантовые приборы / О.В. Рожков, В.Н. Рождествин; под ред. И.И. Пахомова. – М.: Радио и связь, 1982. – 456 с.
- [2] Климков, Ю.М. Прикладная лазерная оптика. – М.: Машиностроение, 1985. – 128 с.
- [3] Пахомов, И.И. Расчёт оптических систем лазерных приборов / И.И. Пахомов, А.Б. Цибуля. – М.: Радио и связь, 1986. – 150 с.
- [4] Пахомов, И.И. К расчету двухлинзовых несклеенных объективов для лазерного излучения / И.И. Пахомов, А.Ф. Ширанков // Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 1994. – № 3. – С. 101-108.
- [5] Аниканов, А.Г. Структурный синтез лазерных оптических систем при ограничениях их параметров / А.Г. Аниканов, И.И. Пахомов, А.Ф. Ширанков // Оптический журнал. – 2010. – Т. 77, № 2. – С. 30-36.
- [6] Слюсарев, Г.Г. Расчет оптических систем / Г.Г. Слюсарев. – Л.: Машиностроение, 1975. – 640 с.
- [7] Родионов, С.А. Автоматизация проектирования оптических систем / С.А. Родионов. – Л.: Машиностроение, 1982. – 270 с.
- [8] Русинов, М.М. Композиция оптических систем / М.М. Русинов. – Л.: Машиностроение, 1989. – 383 с.
- [9] Гудмен, Д. Введение в фурье-оптику / Д. Гудмен. – М.: Мир, 1970. – 364 с.
- [10] ГОСТ Р ИСО 11146-1-2008. Лазеры и лазерные установки (системы). Методы измерений ширин, углов расходимости и коэффициентов распространения лазерных пучков. Часть 1. Стигматические (гомоцентрические) и слабоастигматические пучки. Введён 01.01.2010. – М.: Стандартинформ, 2010. – 13 с.
- [11] Пахомов, И.И. Описание, расчёт и анализ искажений многомодовых лазерных пучков / И.И. Пахомов, А.Ф. Ширанков, П.А. Носов // Оптический журнал. – 2010. – Т. 77, № 2. – С. 37-43.
- [12] Носов, П.А. Абберационный синтез оптических систем, предназначенных для преобразования лазерных пучков / П.А. Носов, В.Ю. Павлов, И.И. Пахомов, А.Ф. Ширанков // Оптический журнал. – 2011. – Т. 78, № 9. – С. 34-44.

# Calculation and analysis of the laser beam field distribution formed by a real optical system

M.L. Galkin<sup>1</sup>, P.A. Nosov<sup>1</sup>, M.S. Kovalev<sup>1</sup>, N.M. Verenikina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, ul. Baumanskaya 2-ya, 5/1, Moscow, Russia, 105005

**Abstract.** When designing high-quality optical systems, it is necessary to calculate the real field distribution of the output beam. In this work, the solution of this problem by the method of the scalar theory of diffraction is considered. For calculate the diffraction integral and visualize the results, the software package Mathematica (Wolfram Mathematica) is used. Aberration analysis of laser optical systems and simulation in the program Mathematica of the output field distribution showed a significant distortion of the field distribution and deviation of the spatial beam parameters from the ideal one, described by analytic expressions.

**Keywords:** diffraction, diffraction integral, calculus of approximations in optics, laser optical system, distortion of laser beam.