

Расчёт фазового дифракционного оптического элемента, формирующего заданный набор сфероидальных функций

А.С. Крупников

Самарский национальный исследовательский университет им.
академика С.П. Королева
Самара, Россия
cjrjf@mail.ru

М.С. Кириленко

Самарский национальный исследовательский университет им.
академика С.П. Королева
Институт систем обработки изображений – филиал ФНИЦ
«Кристаллография и фотоника» РАН
Самара, Россия
areatangent@gmail.com

Аннотация—Рассматриваются сфероидальные функции, рассчитанные методом решения уравнения на собственные значения и собственные векторы для преобразования Фурье в конечных пределах. С помощью итерационных алгоритмов произведён расчёт фазового дифракционного оптического элемента для формирования суперпозиции собственных мод оптической системы – сфероидальных функций.

Ключевые слова— сфероидальные функции, преобразование Фурье, фазовый ДОЭ, линзовая система, итерационные алгоритмы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сфероидальные функции представляют собой полный набор функций с ограниченной спектральной полосой [1]. Одна из областей применения сфероидальных функций – это теория изображений. В этой области сфероидальные функции стали применяться после того, как была установлена их связь с преобразованием Фурье в конечных пределах [2, 3].

Сфероидальные функции не имеют аналитического представления, поэтому их свойства до сих пор являются предметом исследования [4], а сами функции следует рассчитывать численно. Один из способов расчёта сфероидальных функций - как собственные функции преобразования Фурье [3, 5]. В работе [6] был предложен метод, основанный на двукратном применении преобразования Фурье с разными пределами интегрирования. Такое преобразование описывает прохождение светового пучка через двухлинзовую систему с ограниченными входной и спектральной областью в одномерном случае. Рассчитанные сфероидальные функции будут являться ортогональными на заданном ограниченном участке [1].

В данной работе производится расчёт фазового дифракционного оптического элемента для формирования заданного набора сфероидальных функций. Для расчётов используются итерационные алгоритмы: алгоритм Герчберга-Сакстона, адаптивно-аддитивный и адаптивно-регуляризационный алгоритм [7-10].

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Линзовая система с пространственными ограничениями во входной и наблюдаемой плоскости описывается с помощью преобразования Фурье в конечных пределах, собственные функции которого

являются сфероидальными функциями. Потери энергии определяются модулями соответствующих собственных значений. Если модули близки к единице, то потери энергии при распространении таких функций будут минимальны, как для одной сфероидальной функции, так и для целого набора.

Для формирования набора сфероидальных функций можно рассчитать дифракционный оптический элемент (ДОЭ). Однако, его функция пропускания в общем случае будет содержать как амплитуду, так и фазу. Изготовление амплитудно-фазовых элементов весьма затруднительно, поэтому в данной работе рассматривается возможность изготовления фазового ДОЭ с помощью итерационных алгоритмов [7-10].

В качестве примера рассматривался набор из 20 двумерных сфероидальных функций, произвольно взятых из набора первых 100 сфероидальных функций. С помощью алгоритма был рассчитан фазовый ДОЭ, формирующий набор желаемых функций с погрешностью 6,77%.

Для оценки полученных результатов использовались свойства сфероидальных функций. Как известно, сфероидальные функции $\Psi_{nm}(x, y)$ являются собственными функциями преобразования Фурье Φ :

$$\Phi\{\Psi_{nm}(x, y)\} = \mu_{nm}\Psi_{nm}(\xi, \eta), \quad (1)$$

где μ_{nm} - собственные значения. Это означает, что сфероидальные функции проходят через линзовую систему с минимальными изменениями. Величина изменений определяется отличием модулей μ_{nm} от единицы. Чем ближе μ_{nm} к нулю, тем меньше энергии сфероидальная функция сохранит при прохождении линзы.

Мы рассчитали фазовый ДОЭ с функций пропускания $\hat{\tau}(x, y)$. Коэффициенты разложения C_{nm} этой функции будем обозначать C_{nm} . С хорошим приближением можно считать, что:

$$\hat{\tau}(x, y) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \Psi_{nm}(x, y), \quad (2)$$

т.е. функция практически полностью раскладывается по рассматриваемому набору сфероидальных функций. Тогда при условии, что освещающий пучок представляет собой константу, после прохождения линзы получим:

$$\begin{aligned} \Phi \left\{ \hat{\tau}(x, y) \right\} &\approx \Phi \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \Psi_{nm}(x, y) \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \Phi \left\{ \Psi_{nm}(x, y) \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm} \mu_{nm} \Psi_{nm}(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда видно, что коэффициенты разложения распределения, полученного на выходе линзовой системы, равны произведению коэффициентов разложения на входе, умноженных на соответствующие собственные значения.

На рис. 1 представлены коэффициенты разложения, вычисленные двумя разными способами. Первый способ (рис. 1а), заключается в следующем: к сформированной суперпозиции функций применяется преобразование Фурье в соответствии с левой частью формулы (3), после чего коэффициенты вычисляются стандартным способом через скалярное произведение.

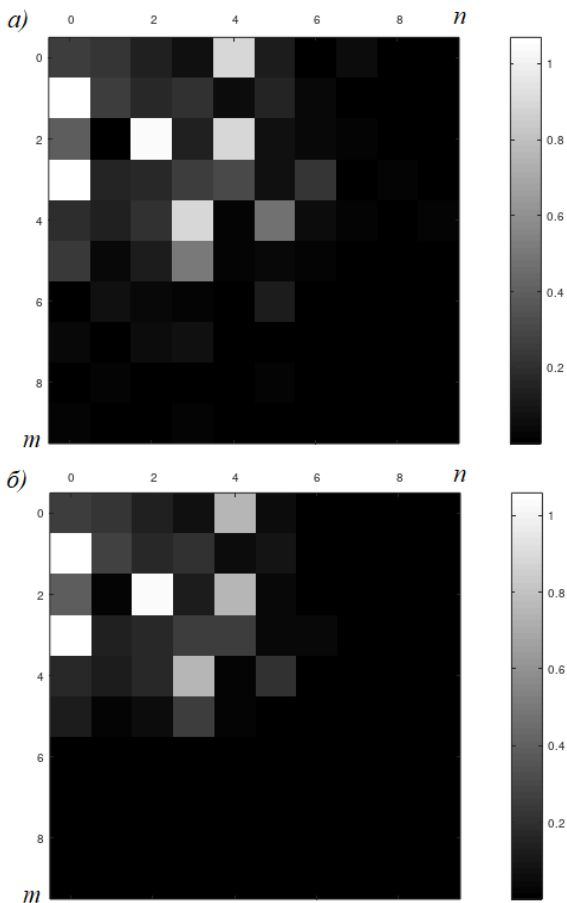


Рис. 1. График модулей коэффициентов, полученных разложением поля, прошедшего через ПФ (а) и график модулей коэффициентов, полученных с помощью умножения на собственные значения (б)

На рис. 1(б) представлен второй способ, где каждый коэффициент – это результат произведения коэффициента сформированной суперпозиции и собственного значения соответствующей функции в соответствии с правой частью формулы (3). Рисунки имеют незначительные отличия, что показывает корректность сформированной суперпозиции фазовым ДОЭ.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был рассчитан фазовый ДОЭ, формирующий суперпозицию сфероидальных функций, с помощью итерационных алгоритмов. Исследование показало, что после распространения суперпозиции через линзовую систему коэффициенты разложения меняются также, как и ожидалось – путём умножения на собственное значение (рис. 1).

Отклонение сформированного изображения от желаемого составило 6,77%.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 21-79-20075 мк).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Slepian, D. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I / D. Slepian, H.O. Pollak // *Bell Syst. Technol. J.* – 1961. – Vol. 40. – P. 43-63.
- [2] Хонина, С.Н. Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами / С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 1999. – Т. 19. – С. 65-70.
- [3] Andreev, V. Optimal orthogonal bases in optical applications / V. Andreev, A. Bourdine, V. Burdin // *CEUR Workshop Proceedings.* – 2020. – Vol. 2667. – P. 323-327.
- [4] Karnik, S. Improved bounds for the eigenvalues of prolate spheroidal wave functions and discrete prolate spheroidal sequences / S. Karnik, J. Romberg, M.A. Davenport // *Applied and Computational Harmonic Analysis.* – 2021. – Vol. 55. – P. 97-128.
- [5] Baumgartl, J. Far field subwavelength focusing using optical eigenmodes / J. Baumgartl, S. Kosmeier, M. Mazilu, E.T.F. Rogers, N.I. Zheludev, K. Dholakia // *Applied Physics Letters.* – 2011. – Vol. 98. – P. 181109.
- [6] Kirilenko, M.S. Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // *SPIE.* – 2014. – P. 91560J.
- [7] Kotlyar, V.V. Diffraction calculation of focusator in a longitudinal segment / V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, S.N. Khonina // *Technical Physics Letters.* – 1991. – Vol. 17(24). – P. 63-66.
- [8] Wu, Y. Adaptive weighted Gerchberg-Saxton algorithm for generation of phase-only hologram with artifacts suppression / Y. Wu, J. Wang, C. Chen, C.J. Liu, F.M. Jin, N. Chen // *Optics Express.* – 2021. – Vol. 29(2). – P. 1412-1427.
- [9] Zhao, T. Modified Gerchberg-Saxton (G-S) Algorithm and Its Application / T. Zhao, Y. Chi // *Entropy.* – 2020. – Vol. 22(12). – P. 1354.
- [10] Dedo, M.I. OAM mode recognition based on joint scheme of combining the Gerchberg-Saxton (GS) algorithm and convolutional neural network (CNN) / M.I. Dedo, Z. Wang, K. Guo, Z. Guo // *Optics Communications.* – 2020. – Vol. 456(11). – P. 124696.