Применение стохастического исчисления к некоторым классам квантовых задач

А.В. Павельев[1], В.В. Семин[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В работе рассматривается применение стохастического исчисления для описания различных квантовых систем. На примере задачи о релаксации кубита продемонстрирован подход, основанный на модификации стохастического уравнения Шредингера, и изучена динамика в марковском и немарковском режимах.

1. Введение
Стохастическое исчисление является инструментом описания случайных (стохастических) процессов и используется в различных областях, таких как общая теория систем, электронная инженерия, финансовая математика и многие другие [1]. Большой интерес представляет применение стохастического исчисления для описания моделей в квантовой физике, например, для описания релаксации открытых квантовых систем, в связи с тем, что такой подход имеет ряд интересных особенностей [2]. Одна из них заключается в том, что процессы в квантовых системах по своей природе являются вероятностными, что делает стохастическое исчисление более естественным для их описания, чем методы, основанные на решении детерминированных уравнений [3]. Другая состоит в том, что при описании динамики открытых квантовых систем интерес представляют небольшое количество их степеней свободы, а окружение, неминуемо влияющее на динамику квантовой системы, очень часто может быть рассмотрено как шум [2].

В данной работе мы рассматриваем применение стохастического исчисления для описания марковской и немарковской релаксации кубита в бозонном термостате.

2. Стохастическое уравнение Шредингера
Основным объектом исследования в данной работе является стохастическое уравнение Шредингера (СУШ) [4]. СУШ диффузионного типа это стохастическое дифференциальное уравнение относительно вектора состояния, имеющее следующий общий вид:

$$\mathrm{d}\left|\psi\right\rangle = A\left|\psi\right\rangle \mathrm{d}t + \sum_i B_i \left|\psi\right\rangle \mathrm{d}W_i, \tag{1}$$

где A, B_i - некоторые операторы, действующие на вектор состояния $|\psi\rangle$, а dW_i – инкремент винеровского процесса. Каждое решение этого уравнения представляет собой независимую квантовую траекторию. Для расчета среднего значения квантовых операторов, необходимо произвести усреднение по достаточно большому ансамблю квантовых траекторий.

Например, матрица плотности может быть найдена из решения СУШ при помощи следующего соотношения:

$$\rho = \mathrm{E}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right), \tag{2}$$

где E означает усреднение по ансамблю.

3. Модель

Рассмотрим операторно-кинетическое уравнение для одного кубита в бозонном термостате [5]:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{2}\left(\sigma_+\sigma_-\rho - 2\sigma_-\rho\sigma_+ + \rho\sigma_+\sigma_-\right), \tag{3}$$

где ρ – матрица плотности, σ_+, σ_- – повышающие и понижающие операторы, γ – постоянная релаксации.

В результате "распутывания"этого уравнения можно получить эквивалентное стохастическое уравнение Шредингера [3]:

$$\mathrm{d}\,|\psi\rangle = A\,|\psi\rangle\,\mathrm{d}t + B\,|\psi\rangle\,\mathrm{d}W, \tag{4}$$

где операторы A и B имеют следующий вид:

$$A = \frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_-,\ B = \sqrt{\gamma}\sigma_-. \tag{5}$$

Для обобщения СУШ на немарковский случай по аналогии со статьей [6], можно заменить винеровский марковский процесс на немарковский процесс Орнштейна-Уленбека, который хорошо подходит для учета эффектов памяти окружения и подчиняется следующему уравнению:

$$\mathrm{d}X = -kX\mathrm{d}t + dW, \tag{6}$$

где k – характерное время скорелированности с термостатом.

Подставляя процесс Орнштейна-Уленбека вместо винеровского процесса, и требуя выполнения условия мартингальности, т.е. сохранения среднего от нормы волнового вектора, переходим к уравнению относительно нормированного вектора:

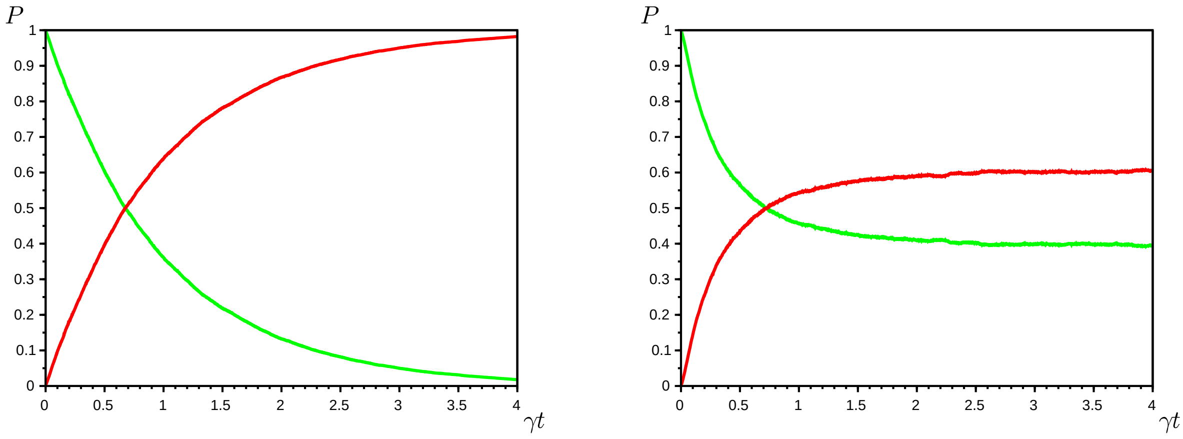
$$\left|\tilde{\psi}\right\rangle = |\psi\rangle\,||\psi||^{-1}. \tag{7}$$

Данное уравнение будет сохранять норму для каждой квантовой траектории и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left|\tilde{\psi}\right\rangle = \left(A - kX(B^\dagger + B) + \frac{1}{2}B\left\langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\right\rangle - \frac{1}{8}\left\langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\right\rangle^2\right)\left|\tilde{\psi}\right\rangle\mathrm{d}t + \\ + \left(B - \frac{1}{2}B\left\langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\right\rangle\right)\left|\tilde{\psi}\right\rangle\mathrm{d}\widetilde{W},\end{aligned} \tag{8}$$

где $\mathrm{d}\widetilde{W}$ – модифицированный в соответствии с теоремой Гирсанова [7] шум:

$$\mathrm{d}\widetilde{W} = \mathrm{d}W - \left\langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\right\rangle\mathrm{d}t. \tag{9}$$



а) б)

Рисунок 1. Динамика кубита в марковском (а) и немарковском (б) режимах

4. Результаты моделирования

Результаты численного моделирования уравнения (7) представлены на рисунке 1. По оси абсцисс отложено безразмерное время γt, по оси ординат – вероятность P обнаружить систему в одном из двух энергетических состояний. Результаты усреднены по 2500 траекториям, погрешность составляет не более ширины линии.

Из рисунка видно, что учет немарковости окружения сильно влияет на стационарные значения, к которым приближается вероятность обнаружения системы в конкретном энергетическом состоянии.

5. Заключение

В данной работе было рассмотрено применение стохастического уравнения Шредингера для описания релаксации кубита в марковском и немарковском режимах в качестве примера использования стохастического исчисления для решения квантовых задач. Таким образом, стохастическое исчисление представляет собой мощный метод для получения динамики квантовых системы, их стационарных состояний вероятностей и спектральных характеристик.

6. Благодарности

Данная работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-32-00249).

7. Литература

[1] Cohen, S. Stochastic calculus and applications / S. Cohen, R. Elliott – New York: Birkhauser, 2015. – 659 p.

[2] Breuer, H.P. The theory of open quantum systems / H.P. Breuer – Oxford University Press on Demand, 2002. – 619 p.

[3] Barchielli, A. Quantum trajectories and measurements in continuous time: the diffusive case / A. Barchielli, M. Gregoratti – Springer, 2009. – 782 p.

[4] Gisin, N. Stochastic quantum dynamics and relativity // Helv. Phys. Acta. – 1989. – Vol. 62(4). – P. 363-371.

[5] Семин, В.В. Квантовая немарковская релаксация в системе двухуровневых атомов / В.В. Семин, А.В. Горохов // Ученые записки Казанского университета. – 2010. - Т. 152, № 2. – С. 158-163.

[6] Павельев, А.В. Исследование немарковской динамики двух взаимодействующих кубитов на основе численного решения нелинейного стохастического уравнения Шрёдингера / А.В. Павельев, В.В. Семин // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 2. – С. 168-173. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-168-173.
[7] Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения / Б. Оксендаль – М. Мир, 2000. – 400 с.

Application of stochasticcalculusfor some classesof quantum models

A.V. Pavelev[1], **V.V. Semin**[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34, Samara, Russia, 443086

Abstract. In this work, we apply stochastic calculus for describing different quantum systems. The suggested approach is based on a modified stochastic Schroedinger equation. We investigate a simple problem of qubit relaxation in markovian and non-markovian regimes with the help of the stochastic Schroedinger equation.