

Применение методов обработки изображений в системах связи с OFDM

К.К. Васильев¹, В.Е. Дементьев¹, А. В. Белянчиков¹

¹Ульяновский государственный технический университет, ул. Северный Венец 32, Ульяновск, Россия, 432027

Аннотация. Рассмотрено применение в системах связи с OFDM и пилот сигналами моделей авторегрессионных случайных полей с кратными корнями характеристических уравнений. Синтезированы соответствующие этим моделям фильтры обработки. Показано, что это существенно повышает эффективность восстановления случайных полей квадратурных составляющих многочастотного канала связи.

1. Введение

В последнее десятилетие интенсивное развитие получили мобильные многочастотные системы связи. В таких системах используется ортогональное частотное разделение с мультиплексированием (OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplexing) [1-7], представляющее собой специальный случай одновременной передачи потока цифровых данных по многим частотным каналам. Высокая спектральная эффективность обеспечивается достаточно близким расположением частот соседних поднесущих колебаний, которые генерируются совместно так, чтобы сигналы всех поднесущих были ортогональны. Это достигается благодаря применению быстрого преобразования Фурье. В итоге формируется частотно-временная сигнальная матрица (рисунок 1), которую можно представить в виде двумерного случайного поля (СП).

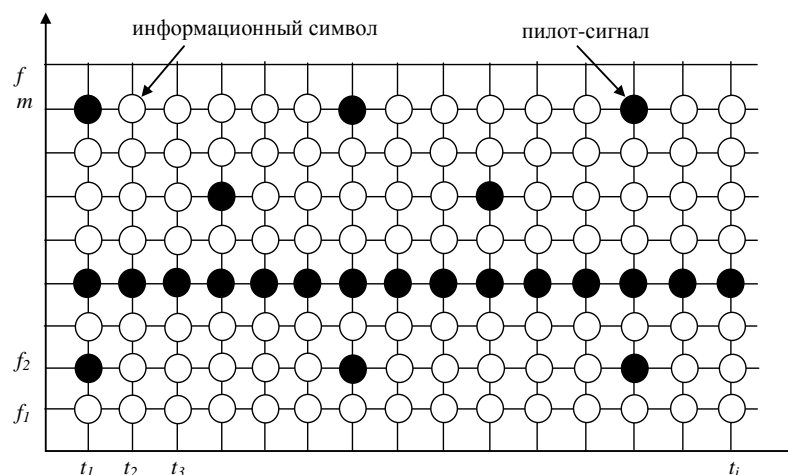


Рисунок 1. Размещение сигналов на частотно-временной сетке.

Для оценивания (интерполяции) частотно-временного СП применяются различные методы, тесно связанные с моделями представления СП квадратурных составляющих (КС) [1-10]. Наиболее эффективно представление СП в виде двумерного марковского поля, что позволяет применять для восстановления калмановские алгоритмы [4-7]. Вместе с тем, это приводит к дополнительным ошибкам за счет замены реальных корреляционных функций (КФ) СП экспоненциальными. Применение же винеровских алгоритмов оценивания, позволяющих использовать близкие к реальным КФ, приводит к большому объему вычислений и невозможности работать в реальном времени даже с применением современных вычислительных средств.

Возникшую проблему можно частично решить с помощью расширения класса марковских процессов и применения для описания СП авторегрессионных (АР) процессов с кратными корнями характеристических уравнений [8-10]. Это позволяет с одной стороны, приблизить характеристики моделей к реальным СП, а с другой обеспечивает реализацию алгоритмов восстановления КС в реальном времени. При этом будет наблюдаться проигрыш по эффективности практически нереализуемому фильтру Винера и выигрыш по отношению к обычным методам калмановской фильтрации.

Таким образом, встает актуальная задача сравнительного анализа эффективности алгоритмов восстановления КС в системах мобильной связи на основе известных и предложенных методов представления СП с помощью АР СП с кратными корнями характеристических уравнений.

В работе [3] проведен анализ КФ огибающей сигнала, принимаемого подвижным объектом при частотном, временном и пространственном разнесении. Анализ экспериментальных данных показывает, что в условиях мегаполиса при движении абонента хорошей аппроксимацией может быть равномерное распределение углов прихода сигналов и экспоненциальное распределение времени задержки: $w(\tau) = \lambda \exp(-\lambda\tau), \tau \geq 0$. В этом случае нормированная КФ запишется в виде произведения КФ по времени $R(k)$ и по частоте $R(l)$ (рисунок 2):

$$R(k, l) = J_0(\omega_{\max}(t_{i+k} - t_i)) / (1 + ((\omega_{j+1} - \omega_j) / \lambda)^2), \quad (1)$$

где J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка; ω_{\max} - максимальная доплеровская добавка частоты, вызванная движением абонента; $\omega_j = 2\pi f_i$.

Так на рисунке 2а представлены корреляционные функции огибающей сигнала по времени, где $R(k) = J_0(1.75 * 10^{-2}k)$, $R_1(k) = p_1^k$, $R_2(k) = (1 + \frac{1-p_2^2}{1+p_2^2}k)p_2^k$; $p_1 = 0.99$, $p_2 = 0.98$. На рисунке 2б представлены корреляционные функции огибающей сигнала по частоте, где $R(l) = \frac{1}{1+1.72*10^{-4}*l^2}$, $R_1(l) = p_1^l$, $R_2(l) = (1 + \frac{1-p_2^2}{1+p_2^2}l)p_2^l$; $p_1 = 0.99$, $p_2 = 0.98$.

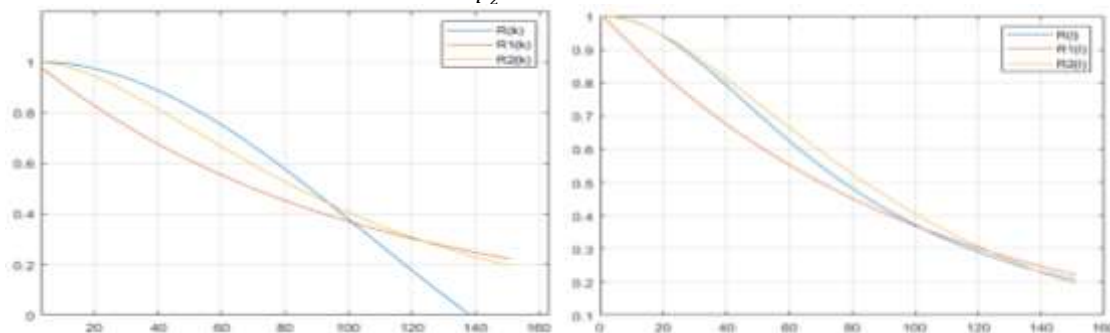


Рисунок 2. Корреляционные функции по времени (а) и по частоте (б).

Плавное изменение КФ во времени и по частоте не всегда позволяет адекватно представить корреляционные связи простейшей АР моделью. Поэтому целесообразно провести сравнительный анализ эффективности алгоритмов фильтрации, основанных на различных АР уравнениях, и при необходимости использовать модели второго или более высоких порядков.

Известные алгоритмы оценивания КС по пилот-сигналам, как правило, основаны на экспоненциальной аппроксимации КФ. К недостаткам простейших АР моделей следует отнести выраженную анизотропию порождаемых СП [9,10]. Вместе с тем, применение разделимых каузальных моделей, образованных АР с кратными корнями характеристических уравнений [8-10], позволяет приблизить реализации таких СП к изотропным фрагментам реальных сечений СП на плоскости частота-время.

2. Эффективность восстановления КС на одной временной позиции

Рассмотрим вначале возможности восстановления КС с КФ (1) в пространстве частот. Выделим одну временную позицию с m частотами, на которых находятся L пилот – сигналов. Для нахождения дисперсии ошибки оценивания КС воспользуемся фильтрацией Калмана при аппроксимации реальной дробно-рациональной КФ (1) АР процессами первого и второго порядка, а также результатами винеровской оптимальной фильтрации. Запишем все значения КС в виде вектора: $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)^T$. Наблюдения

$$\bar{z} = C\bar{x} + \bar{n} \quad (2)$$

осуществляются на L частотах, где находятся пилот-сигналы; C – $L \times m$ – матрица, соответствующая пилот – сигналам; $\bar{n} = (n_1 n_2 \dots n_L)^T$ – вектор погрешностей с ковариационной матрицей $V = M\{\bar{n}\bar{n}^T\} = \sigma^2 E$; σ^2 – дисперсия ошибки; E – единичная матрица.

Оптимальная оценка вектора \bar{x} КС записывается в виде:

$$\hat{\bar{x}} = PC^T V^{-1} \bar{z},$$

где $P = V_x (E + C^T V^{-1} C V_x)^{-1}$ – ковариационная матрица ошибок оценивания;

$$V_x = \sigma_x^2 \tilde{V}_x; \tilde{V}_x = \begin{pmatrix} 1 & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1M} \\ R_{21} & 1 & R_{23} & \dots & R_{2M} \\ - & - & - & - & - \\ R_{M1} & R_{M2} & R_{M3} & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$R_{j_1 j_2}$ – коэффициенты корреляции КС, которые находятся по заданной КФ (1):

$$R_{j_1 j_2} = R(l = j_1 - j_2) = 1 / (1 + ((\omega_{j+1} - \omega_j) / \lambda)^2) = 1 / (1 + a^2 l^2), \quad (3)$$

Заданный интервал корреляции L_0 позволяет выбрать коэффициента из условия $R(L_0) = 1 / (1 + a^2 L_0^2) = e^{-1}$. Обычно применение фильтра Калмана основано на замене КФ (3) экспонентой (рис.2,б):

$$R_1(l) = p_1^{|l|}. \quad (4)$$

Для повышения эффективности восстановления КС будем использовать АР процесс с корнем характеристического уравнения кратности два. При этом КФ имеет вид (рис.2,б):

$$R_2(l) = (1 + ((1 - p_2^2) / (1 + p_2^2)) |l|) p_2^{|l|} \quad (5)$$

где параметр p_2 выбирается по заданному интервалу корреляции L_0 .

В качестве примера рассмотрим восстановление КС на 10 частотных позициях с двумя пилот-сигналами (рисунок 3), расположенными на первой и девятой позиции.

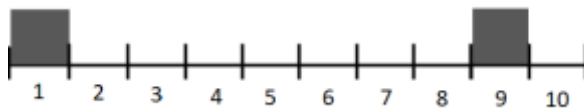


Рисунок 3. Расположение двух пилот-сигналов.

При этом

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительные дисперсии ошибок оценивания (рисунок 4) будут диагональными элементами матрицы

$$\frac{P}{\sigma_x^2} = V_x (E + q C^T C V_x)^{-1},$$

где $q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}$ – отношение сигнал/шум.

На рисунке 4 представлена относительная дисперсия ошибки в зависимости от номера элемента в последовательности, где $R(l)$ – КФ с использованием винеровской фильтрации, $R_1(l)$ – КФ классической калмановской фильтрации с экспоненциальной аппроксимацией, $R_2(l)$ – КФ с применением АР моделей с кратными корнями характеристических уравнений.

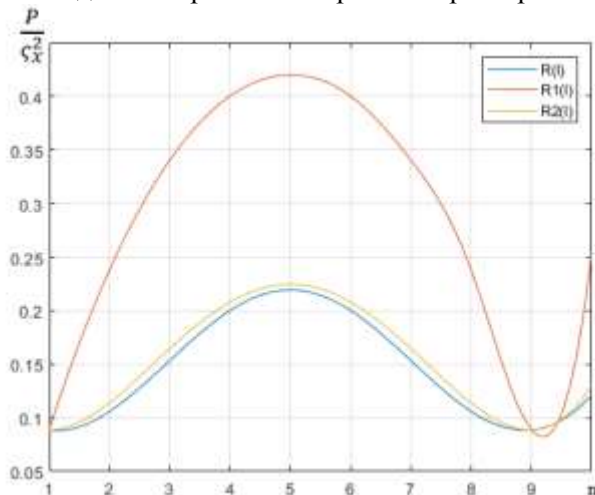


Рисунок 4. Относительная дисперсия ошибки при $q = 10$.

Как следует из анализа кривых на рисунке 4, применение АР моделей с кратными корнями характеристических уравнений и КФ $R_2(l)$ практически не приводит к проигрышу по дисперсии ошибки по отношению к винеровской фильтрации с КФ $R(l)$.

3. Эффективность восстановления полей КС

Рассмотрим возможности восстановления полей КС по наблюдаемым пилот-сигналам (рисунок1). В этом случае вектор КС $\bar{x}_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{im})^T$ зависит от дискретного времени, причем динамика изменения \bar{x}_i определяется КФ (1). Для непосредственного применения (1) для решения задачи восстановления могут использоваться методы винеровской фильтрации [1-6,9]. Однако при этом возникают большие вычислительные сложности. Для применения рекуррентных калмановских алгоритмов со значительно меньшим объемом вычислений необходимо описать динамику изменения \bar{x}_i с помощью векторного уравнения состояния:

$$\bar{x}_i = \varphi_{i-1} \bar{x}_{i-1} + \bar{\xi}_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_i - m \times m$ - матрицы; $\bar{\xi}_i, i = 1, 2, \dots$ - последовательность m - мерных гауссовских некоррелированных векторов с $M \{ \bar{\xi}_i \bar{\xi}_i^T \} = V_{\xi i}$.

Для того, чтобы воспользоваться уравнениями оптимальной фильтрации [4-9] достаточно записать все наблюдения по аналогии с (2) в очередной i -й момент времени в виде:

$$\bar{z}_i = C_i \bar{x}_i + \bar{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{n}_i = (n_{i1}, n_{i2} \dots n_{iL_i})^T, i = 1, 2, \dots$ - последовательность некоррелированных случайных векторов с ковариационными матрицами V_i . После этого можно записать уравнения для ковариационных матриц ошибок фильтрации [9]

$$P_i = (E - B_i C_i) P_{\xi i},$$

где $B_i = P_{\xi i} C_i^T \Gamma_i^{-1}, \Gamma_i = C_i P_{\xi i} C_i^T + V_i, P_{\xi i} = \varphi_{i-1} P_{\xi i-1} \varphi_{i-1}^T + V_{\xi i}, \Gamma_i = C_i P_{\xi i} C_i^T + V_i,$

и сравнить установившиеся значения дисперсий ошибок фильтра Калмана для экспоненциальных КФ вида (4), (5) [7-9] и фильтра Винера для КФ (1). Однако даже для анализа эффективности этот путь приводит к очень большому числу параметров моделей и возможных вариантов размещения пилот-сигналов.

В работах [4-10] рассмотрены варианты построения калмановской фильтрации полей КС при экспоненциальной аппроксимации реальных КФ:

$$R_1(k, l) = r_1^{|k|} p_1^{|l|} \quad (6)$$

Для уменьшения возникающих при этом потерь в эффективности восстановления КС по пилот-сигналам воспользуемся более точной аппроксимацией на основе АР уравнений с кратными корнями характеристических уравнений [8-10]. При этом КФ имеет следующий вид:

$$R_2(k, l) = \left(1 + \frac{(1-r_2^2)}{(1+r_2^2)} |k|\right) r_2^{|k|} \left(1 + \frac{(1-p_2^2)}{(1+p_2^2)} |l|\right) p_2^{|l|}, \quad (7)$$

где параметры r_1, p_1, r_2, p_2 выбираются по заданному в (1) интервалу корреляции.

Сравнительный анализ эффективности алгоритмов проведем для ячейки размером $L_t \times L_\omega$ символов с наблюдениями $\bar{z} = (z_1 z_2 z_3 z_4)^T$ четырех пилот-сигналов (рисунок 5), на основе которых восстанавливаются КС. При этом наибольшую дисперсию ошибки восстановления будет иметь центральный элемент x_0 (рисунок 5).

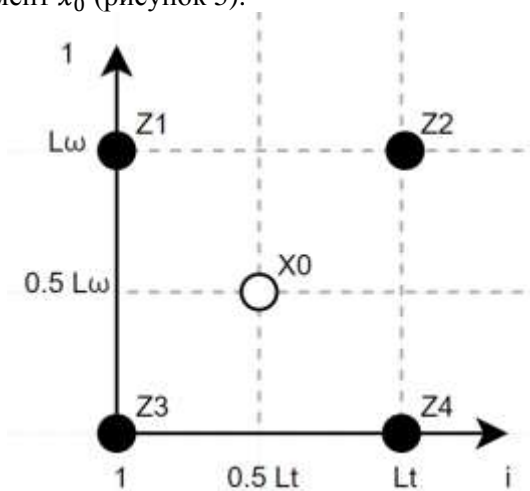


Рисунок 5. Расположение четырех пилот-сигналов и точки прогнозирования.

В рассматриваемой ситуации наилучшей будет линейная оценка

$$\hat{x}_0 = \bar{\alpha}^T \bar{z}$$

весовые коэффициенты $\bar{\alpha}^T = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ которой выбираются из условия минимума дисперсии ошибки:

$$\sigma_\varepsilon^2 = M\{(\hat{x}_0 - x_0)^2\} = \sigma_x^2 - 2\sigma_x^2 \bar{\alpha}^T R_x + \sigma_x^2 \bar{\alpha}^T R_z \bar{\alpha}, \quad (8)$$

где $R_z = M\{\bar{z}\bar{z}^T\}/\sigma_x^2, R_x = \{x_0 x_0\}/\sigma_x^2$.

Нетрудно показать, что этот минимум достигается при выборе

$$\bar{\alpha} = R_z^{-1} R_x \quad (9)$$

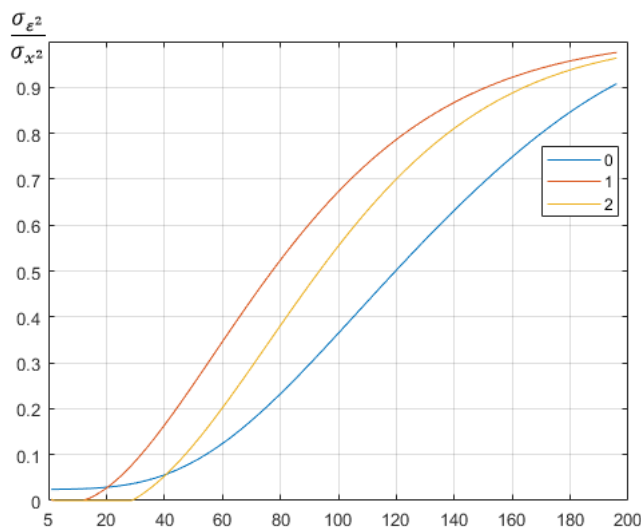


Рисунок 6. Относительные дисперсии ошибок прогнозирования.

Таким образом, при выборе коэффициентов (9) с учетом КФ (1) получим минимальное значение дисперсии ошибки. Если же используется замена КФ (1) на КФ вида (6) или (7), обеспечивающие возможность калмановской фильтрации, то коэффициенты (9) будут отличаться от оптимальных, что приводит к увеличению ошибки фильтрации. На рис. 6 показаны зависимости относительных дисперсий ошибок фильтрации (ось ординат) от размера фрагмента (ось абсцисс) $L_t = L_\omega = L$ при $q = 10$ для оптимального алгоритма (кривая «0») с использованием КФ (1), известного квазиоптимального алгоритма (кривая «1») с использованием КФ (6), а также алгоритма восстановления КС (кривая «2») с применением КФ (7).

Анализ представленных результатов показывает значительно меньшую дисперсию восстановления КС с применением модели с кратными корнями характеристических уравнений по сравнению с традиционной АР моделью первого порядка. Вместе с тем наблюдается незначительный проигрыш по отношению к практически нереализуемому фильтру Винера с использованием КФ (1).

4. Заключение

В работе предложен новый подход к восстановлению полей КС в реальном масштабе времени на основе калмановской фильтрации с применением АР моделей с кратными корнями характеристических уравнений. При этом показан незначительный проигрыш по отношению к нереализуемым процедурам винеровской фильтрации. Также установлено, что использование классической калмановской фильтрации с экспоненциальной аппроксимацией реальных КФ проигрывает предложенному подходу в 2-3 раза по дисперсии ошибки восстановления при незначительном уменьшении вычислительных затрат. Дальнейшее уточнение представленных результатов может быть выполнено на основе расчетов и сравнения установившихся значений ковариационных матриц ошибок фильтров Винера и Калмана, построенных для трех рассмотренных моделей с КФ (1), (6) и (7).

5. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научных проектов № 18-47-730009 и № 19-47-730011.

6. Литература

- [1] Abeta, S. Adaptive channel estimation for coherent DS-CDMA mobile radio using time-multiplexed pilot and parallel pilot structures / S. Abeta, M. Sawahashi, F. Adachi // *IEICE Trans. Commun.* – 1999. – Vol. E82-B. – N 9. – P. 1505-1513.
- [2] Nam, L. Extended symbol-aided estimation for non-selective Rayleigh fading channels / L. Nam, K. Sakaniwa // *IEICE Trans. Signal Proc.* – 2001. – Vol. 49. – P. 3065-3073.
- [3] Джеймс, У.К. Связь с подвижными объектами в диапазоне СВЧ / У.К. Джеймс – М.: Связь, 1979. – 520 с.
- [4] Yuanjin, Zh. A Novel Channel Estimation and Tracking Method for Wireless OFDM Systems Based on Pilots and Kalman Filtering, 2001. – P. 324-328.
- [5] Li, Y.G. Pilot-symbol-aided Channel Estimation for OFDM in Wireless Systems // *IEEE Trans. Vehic. Technol.* – 2000. – Vol. 49. – P. 1207-1215.
- [6] Li, Y.G. Robust Channel Estimation for OFDM Systems with Rapid Dispersive Fading Channels / Y.G. Li, L.J. Cimini, N.R. Sollenberger // *IEEE Trans. Commun.* – 1998. – Vol. 46. – P. 902-914.
- [7] Васильев, К.К. Применение методов фильтрации случайных полей при проектировании многочастотных систем связи с OFDM / К.К. Васильев, М.Н. Служивый // *Наукоемкие технологии.* – 2013. – Т. 14. – С. 32-35.

- [8] Vasiliev, K.K. Developing a filtering algorithm for doubly stochastic images based on models with multiple roots of characteristic equations / K.K. Vasiliev, N.A. Andriyanov, V.E. Dementiev // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2019. – Vol. 29(1). – P. 10-20
- [9] Васильев, К.К. Оптимальная обработка сигналов в дискретном времени: учеб. пособие – М.: Радиотехника, 2016. – 288 с.
- [10] Васильев, К.К. Статистический анализ последовательностей изображений / К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников – М.: Радиотехника, 2017. – 248 с.

Application of image processing methods in communication systems with OFDM

K.K. Vasiliev¹, V.E. Dementev¹, A.V. Belyanchikov¹

¹ Ulyanovsk State Technical University, Severniy Venets str. 32, Ulyanovsk, Russia, 432027

Abstract. The application of models of autoregressive random fields with multiple roots of characteristic equations in communication systems with OFDM and pilot signals is considered. Processing filters corresponding to these models are synthesized. It is shown that this significantly increases the efficiency of recovery of random fields of quadrature components of a multi-frequency communication channel.