ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПИРАМИД ДЛЯ СИНТЕЗА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Е.В. Белова

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Предлагаемая работа посвящена синтезу и исследованию параллельного алгоритма разностного решения уравнения Пуассона с использованием метода Якоби. На примере двумерного случая демонстрируется эффективность применения метода пирамид при синтезе упомянутого алгоритма.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, метод Якоби, параллельный алгоритм, метод пирамид.

Введение

Разностное решение дифференциальных уравнений с середины 50-х годов [1] активно применяется для постановки вычислительных экспериментов в различных областях естественных наук. Действительно, в ряде случаев постановка натурного эксперимента либо необычайно дорога и весьма затратна по времени (большой адронный коллайдер), либо запрещена международными договорами (например, о невозобновлении ядерных испытаний), либо невозможна вовсе (эволюция крупных астрофизических объектов).

Популярным инструментом математического моделирования является решение сеточных уравнений неявных разностных схем для различных дифференциальных задач. Процедура получения указанного решения, отличаясь от алгоритмов решения явных разностных схем уравнений лучшей устойчивостью [2] (зачастую абсолютной), характеризуется работой с системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые не возникают для явных уравнений. Указанное обстоятельство побуждает исследователей к разработке векторных и параллельных методов решения СЛАУ ленточного вида [3], с целью снижения длительности моделирования.

Так, в недавней работе [4] предлагается параллельный алгоритм многосеточного метода решения эллиптических уравнений с помощью чебышевской итерационной процедуры. Авторы проводят его тестирование на суперкомпьютере “Ломоносов”, добиваясь на 64 вычислительных узлах (каждый содержит 2 шести ядерных процессоров Intel Xeon X5670) ускорения вычислений в 25 раз по сравнению с методом простой итерации.

Стремясь к дальнейшему сокращению длительности вычислений по аналогичным алгоритмам, автор предлагаемой работы использует метод пирамид для сокращения длительности коммуникаций за счет дублирования арифметических операций различными процессорами. В качестве примера выбраны неявная разностная схема для двумерного уравнения Пуассона и метод Якоби, решения сеточных уравнений упомянутой схемы.

Разностная схема для уравнения Пуассона и метод Якоби

Рассмотрим неоднородное уравнение Пуассона в двумерном случае (прямоугольная область вычислительного эксперимента со сторонами l1 и l2 соответственно):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(\mathrm{x},\mathrm{y}).$$

Граничные условия положим равными нулю (условия Дирихле). Правую часть уравнения определим как

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y})=-2\pi^2\sin\frac{\pi x}{l_1}\sin\frac{\pi y}{l_2}$$

для простоты записи аналитического решения, необходимого при верификации сходимости.

Построение аппроксимирующей разностной схемы для уравнения Пуассона в соответствии с [2] произведём заменой производных разностными отношениями на сеточной области

$$\omega_h=\{(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_j):x_i=\mathrm{ih}_x;i=\overline{0,I+1},\mathrm{h}_x=\frac{l_1}{I+1},$$

$$y_j=j\,\mathrm{h}_y;\mathrm{j}=\overline{0,\mathrm{J}+1},\mathrm{h}_y=\frac{l_2}{J+1}\}$$

Тогда схема выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\dfrac{U_{i+1,j}-2U_{ij}+U_{i-1,j}}{h_x^2}+\dfrac{U_{i,j+1}-2U_{ij}+U_{i,j-1}}{h_y^2}=f_{ij},i=\overline{1,I},\\ j=\overline{1,J}\\ U_{0,j}=0,\ j=\overline{0,J+1},\\ U_{I,j}=0,\ j=\overline{0,J+1},\\ U_{i,0}=0,i=\overline{0,I+1},\\ U_{i,J}=0,i=\overline{0,I+1}.\end{cases} \qquad (1)$$

Решение сеточных уравнений схемы (1) произведём методом Якоби (согласно [3]), переписав основное разностное уравнение в итерационной форме, положив область квадратной (lx=ly), а ее дискретизацию равномерной (h=hx=hy)

$$U_{ij}^{k+1}=\frac{1}{4}(\mathrm{U}_{i+1,j}^k+\mathrm{U}_{i-1,j}^k+\mathrm{U}_{i,j-1}^k+\mathrm{U}_{i,j+1}^k)+\frac{1}{4}h^2f_{ij},$$

$$U_{ij}^0=\varphi_{ij} \qquad (2).$$

Считалось, что при выбранном начальном приближении достаточно K итераций для достижения необходимой точности.

Метод пирамид

В основе метода пирамид лежит идея о получении полностью автономных ветвей [5] вычислительного процесса, не нуждающихся в процессе счёта в синхронизации и обмене информацией.

Классический вариант данного метода описывается в работах [5] и [6]. Авторский, предлагаемый здесь, представляет собой его модификацию, полученную путем введения понятия высоты пирамиды.

Так, в данной работе выполняется одномерная декомпозиция двумерной сеточной области (рис. 1) на μ задач, каждая из которых вычисляет значения итерационных приближений сеточной функции на n итераций (высота пирамиды) вперёд для своей подобласти.

При этом вычисления начинаются с R=r+2n значений (основание пирамиды) и завершаются для r значений (вершина пирамиды), а сама подобласть, ограниченная n итерациями имеет вид пирамиды с плоской вершиной.

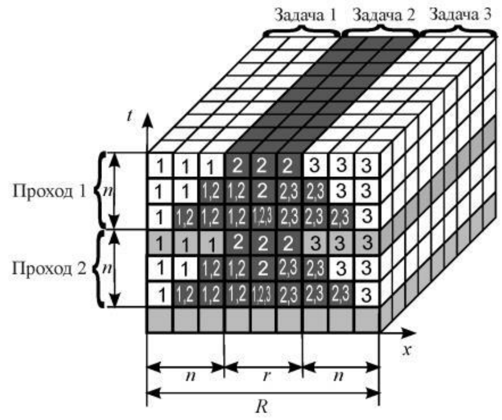

Рис.1. Изображение декомпозиции сеточной области для случая μ=3, R=9, n=3.

Далее, в предлагаемой работе для простоты рассмотрен двухзадачный случай (μ=2), характеризующийся пирамидами с высотой *n*=1 (рис. 2), 2 (рис.3), 4, 8, 16.

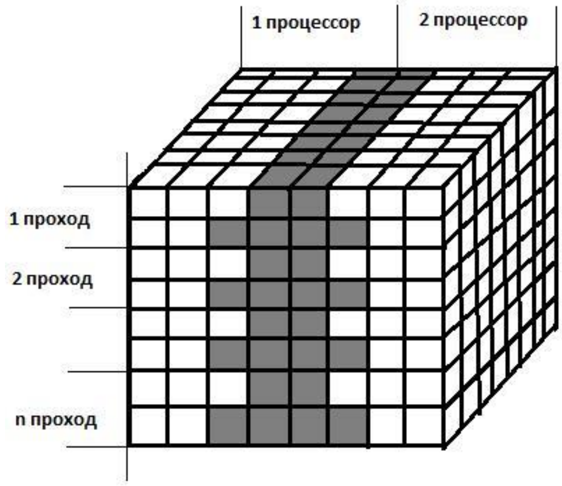

Рис.2. Декомпозиция для высоты равной единице

Из рис. 2 видно, что случай *n*=2 соответствует обычному параллельному алгоритму из [3], характеризующемуся производством коммуникаций на каждой итерации метода Якоби.

Для *n*=2 (рис.3) количество коммуникаций сокращается вдвое, они сопровождают расчёт на каждой чётной итерации. Следуя намеченной тенденции, далее отметим, что для алгоритма с произвольной высотой *n* коммуникаций производятся через каждые *n* итераций. При *n*=*K* получим классический вариант метода пирамид, не характеризующийся коммуникациями вовсе.

Таким образом, в нашем распоряжении оказывается инструмент, позволяющий произвольно варьировать количество коммуникаций от *K* (при *n*=1) до нуля (при *n*=*K*).

Отметим, что сокращение длительности коммуникаций при уменьшении их количества сопровождается ростом времени арифметических операций. Действительно, как видно из рис. 1 при увеличении *n* растет и длина основания пирамиды *R*, а следовательно и количество сеточных функций, отнесенных к ведению одного процессора. Более того, указанные вычисления дублируются соседними процессорами, являясь платой за сокращение коммуникаций.

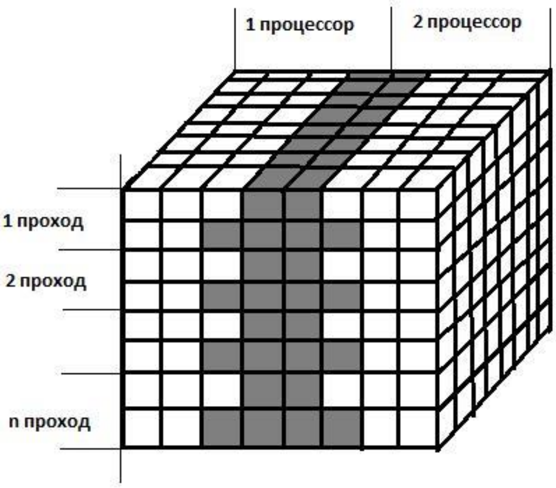

Рис.3. Декомпозиция для высоты равной двум

Постановка вычислительных экспериментов

Подтверждение работоспособности предложенного подхода к построению параллельных алгоритмов производилось методом вычислительного эксперимента.

Изначально исследования проводились в сравнении с реализацией для 2 ядер стационарного компьютера, в статье упоминается лишь случай кластера, как наиболее успешный.

Использовался узел суперкомпьютера “Сергей Королёв” [7], в частности 2 ядра процессора 4x Intel Xeon E7-4860, работающих под управлением операционной системы Red Hat Enterprise Linux 5.11.

Программная реализация алгоритмов производилась на языке fortran, компиляция – на gfortran 4.6.

Параметры дискретизации сеточной области определялись величинами I=55, K=100, при которых ускорение традиционного параллельного алгоритма, в сравнении с последовательным, перестаёт меняться и колеблется примерно на одном уровне S=2,045.

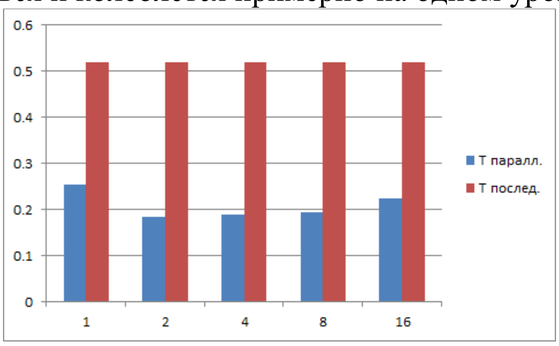

Рис.4. U-образная диаграмма результатов эксперимента на кластере

Табл.1. Результаты эксперимента на кластере

n	$T_{паралл.}$	S
1	0,254	2,045
2	0,184	2,830
4	0,187	2,771
8	0,195	2,664
16	0,223	2,330

Из таблицы, где $T_{паралл.}$ – время выполнения параллельного алгоритма, и рисунка видно, что применение метода пирамид позволило добиться повышения ускорений вычислительного процесса более чем в 1,7 раза по сравнению с традиционным последовательным подходом и даже превзойти теоретический предел, установленный законом Амдала.

Возможно, упомянутый эффект связан с дополнительной оптимизацией коммуникаций между оперативной и кэш-памятью процессора при декомпозиции сеточной области.

Диаграмма на рис. 4 имеет явный U-образный вид, поскольку первоначальный выигрыш в длительности вычислений за счёт уменьшения количества коммуникаций далее, с ростом высоты пирамиды, начинает компенсироваться увеличением объема арифметических операций.

Заключение

Предложенный в работе приём составления параллельных алгоритмов итерационного решения сеточных уравнений неявных разностных схем (на примере метода Якоби для уравнения Пуассона) позволил повысить ускорение вычислений по сравнению с традиционным параллельным подходом в 1,2 раз. Автор надеется, что разработанная методика найдёт применение при разностном решении широкого круга неявных сеточных уравнений.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-07-00291-а.

Литература

1. Рябенький, В.С. А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
2. Самарский, А.А. Теория разностных схем// М.: Наука, 1977. — 656 с.
3. Ортега, Дж. Введение в параллельные и векторные методы решение линейных систем. Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 367 с.
4. Жуков, В.Т. Новикова, Н.Д. Феодоритова, О.Б.. Параллельный многосеточный метод для решения эллиптических уравнений. //Матем. моделирование, 2014, 26:1, 55–68
5. Вальковский, В.А. Распараллеливание алгоритмов и программ. Структурный подход. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.
6. Lamport, L. The Parallel Execution of DO Loops. Communications of the ACM, 83-93, 1974.
7. Суперкомпьютерный центр СГАУ [Электронный ресурс]. – URL: http://hpc.ssau.ru/node/6 (дата обращения 30.03.2016).