Применение метода фиктивных областей к двумерным задачам динамики вязкой жидкости

В.П. Сироченко

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

Аннотация

Для решения двумерных задач гидродинамики в нерегулярных областях предложен приближенный метод на основе метода фиктивных областей. Разработан вычислительный конечно-разностный алгоритм решения вспомогательной задачи метода фиктивных областей. Приведены результаты численного моделирования двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости в областях со сложной границей.

Ключевые слова: вязкая жидкость; нерегулярная область; метод фиктивных областей; метод конечных разностей; численное моделирование

1. Введение

Важным направлением развития методов математического моделирования являются исследования по приближенным методам решения задач математической физики в сложных многомерных областях. Для решения многих прикладных задач в нерегулярных областях широко применяется метод фиктивных областей, отличающийся высокой степенью автоматизации программирования. Основная идея метода фиктивных областей состоит в том, чтобы решать задачу не в исходной сложной области D_0, а в некоторой другой, более простой области D, причем $D_0 \subset D$. В качестве D можно выбрать n -мерный параллелепипед. Это позволяет создавать программное обеспечение сразу для достаточно широкого класса задач с произвольными расчетными областями.

Возможности применения метода фиктивных областей к задачам гидродинамики в переменных «скорость, давление», «функция тока, завихренность» рассмотрены во многих работах. В данной работе метод фиктивных областей применяется для приближенного решения стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости в переменных «скорость, завихренность».

2. Постановка задачи. Метод фиктивных областей

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса в физических переменных «скорость, давление» [1]. При моделировании плоских течений часто используются другие переменные: «функция тока, завихренность», «скорость, завихренность» [2]. Эквивалентность различных постановок задач гидродинамики в двумерном случае (в том числе для многосвязных областей) доказана в [3].

Стационарное двумерное течение однородной вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной односвязной области D_0 с границей ∂D_0 описывается следующими уравнениями и граничными условиями для компонент скорости u, v и завихренности ω [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(v\omega)=\eta\,\Delta\omega + f(x,y), \tag{1}$$

$$\Delta u=-\frac{\partial\omega}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\Delta v=\frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad (x,y)\in D_0, \tag{3}$$

$$u=U(x,y), \qquad (x,y)\in\partial D_0, \tag{4}$$

$$v=V(x,y), \qquad (x,y)\in\partial D_0, \tag{5}$$

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (x,y)\in\partial D_0. \tag{6}$$

Здесь x, y – декартовы координаты, η – коэффициент вязкости жидкости, $f(x,y), U(x,y), V(x,y)$ – заданные функции. При ограниченной функции $f(x,y)$ на произвольной кривой l, лежащей в D_0, для дифференциальных уравнений (1)-(3) выполняются естественные условия сопряжения:

$$[u]=0,\quad [v]=0,\quad [\omega]=0,\quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=0,\quad \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]=0,\quad \left[\frac{\partial \omega}{\partial n}\right]=0,\qquad (x,y)\in l\subset D_0, \tag{7}$$

где n – направление нормали к l, $[\cdot]$ означает скачок при переходе кривой l.

Первые три из условий (7) соответствуют естественному физическому требованию непрерывности компонент скорости и завихренности. Последние три условия (7) могут быть получены интегрированием уравнений (1)-(3) по некоторой окрестности участка кривой l, применением формулы Гаусса-Остроградского и стягиванием окрестности к l с обеих сторон. В силу произвольности участка кривой получим условия сопряжения (7).

Для решения задач гидродинамики в сложных областях часто применяется метод фиктивных областей. В [4,5] дано теоретическое обоснование метода фиктивных областей для задач динамики вязкой жидкости в переменных «скорость, давление», «функция тока, завихренность».

Для приближенного решения задачи (1)-(6) в переменных «скорость, завихренность» в нерегулярной области D_0 применим метод фиктивных областей в варианте с продолжением по младшим коэффициентам [4]. Следуя общей идее метода, дополним D_0 фиктивной областью D_1 до прямоугольной области

$$D=\{(x,y)\,|\,a<x<b,\ \ c<y<d\}.$$

В расширенной области D рассмотрим вспомогательную задачу метода фиктивных областей с малым положительным параметром ε для приближенного решения $u^\varepsilon, v^\varepsilon, \omega^\varepsilon$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon\omega^\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(v^\varepsilon\omega^\varepsilon)=\eta\left(\Delta\omega^\varepsilon-c^\varepsilon\left(\omega^\varepsilon-\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}\right)\right)+f^\varepsilon(x,y), \tag{8}$$

$$\Delta u^\varepsilon-c^\varepsilon(u^\varepsilon-U)=-\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial y}, \tag{9}$$

$$\Delta v^\varepsilon-c^\varepsilon(v^\varepsilon-V)=\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x},\qquad (x,y)\in D, \tag{10}$$

$$u^\varepsilon=U(x,y),\qquad (x,y)\in\partial D, \tag{11}$$

$$v^\varepsilon=V(x,y),\qquad (x,y)\in\partial D, \tag{12}$$

$$\omega^\varepsilon=\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y},\qquad (x,y)\in\partial D, \tag{13}$$

где

$$c^\varepsilon(x,y),\ f^\varepsilon(x,y)=\begin{cases}0\quad,\ f(x,y),\ (x,y)\in D_0,\\ 1/\varepsilon,\quad 0\quad,\ (x,y)\in D_1.\end{cases} \tag{14}$$

Функции $U(x,y)$, $V(x,y)$, в исходной задаче заданные на ∂D_0, продолжены гладким образом в фиктивную область D_1. Для приближенного решения $u^\varepsilon, v^\varepsilon, \omega^\varepsilon$ на общей границе исходной области D_0 и фиктивной области D_1 $S=\partial D_0\cap\partial D_1$ при ограниченной функции $f^\varepsilon(x,y)$ ставятся также естественные для уравнений (8)-(10) однородные условия сопряжения:

$$[u^\varepsilon]=0,\quad [v^\varepsilon]=0,\quad [\omega^\varepsilon]=0,\quad \left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}\right]=0,\quad \left[\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n}\right]=0,\quad \left[\frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial n}\right]=0,\qquad (x,y)\in S. \tag{15}$$

Проведем качественный анализ вспомогательной задачи метода фиктивных областей (8)-(15).

Из задания коэффициента $c^\varepsilon(x,y)$ и правой части $f^\varepsilon(x,y)$ в D_0 в виде (14) следует, что $u^\varepsilon(x,y),\ v^\varepsilon(x,y),\ \omega^\varepsilon(x,y)$ точно удовлетворяют в D_0 всем уравнениям (1)-(3) исходной задачи. Очевидно, выполняются и граничные условия (4)-(6) на $\partial D_0\setminus S$. Рассмотрим вопрос о граничных условиях на S. Из (8)-(10) с учетом задания $c^\varepsilon(x,y)$ в D_1 следует, что

$$\omega^\varepsilon(x,y)\to\left(\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}(x,y)\right),\quad u^\varepsilon(x,y)\to U(x,y),\ \ v^\varepsilon(x,y)\to V(x,y)\qquad \text{при } \varepsilon\to 0,\qquad (x,y)\in D_1. \tag{16}$$

Из условий сопряжения (15), очевидно, имеем:

$$\left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}\right]=0,\qquad \left[\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}\right]=0,\qquad (x,y)\in S. \tag{17}$$

Из соотношений (16) и условий сопряжения (15), (17) получаем, что предельные значения $u^{\varepsilon}(x,y)$, $v^{\varepsilon}(x,y)$, $\omega^{\varepsilon}(x,y)$ на S со стороны исходной области D_0 приближенно удовлетворяют граничным условиям (4)-(6).

Таким образом, решение $u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}, \omega^{\varepsilon}$ вспомогательной задачи метода фиктивных областей (8)-(15) приближенно удовлетворяет всем соотношениям исходной задачи (1)-(6) в области D_0, и, следовательно, является приближенным решением задачи (1)-(6) при достаточно малых значениях параметра продолжения ε.

3. Конечно-разностный численный метод решения вспомогательной задачи метода фиктивных областей

Для численного решения вспомогательной задачи метода фиктивных областей (8)-(15) введем в прямоугольной области

$$D = \{(x,y) \mid a < x < b,\ c < y < d\}$$

равномерную прямоугольную разностную сетку $\overline{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ с шагами h_1 и h_2 по переменным x и y соответственно. Здесь

$$\omega_h = \{(x,y) \mid x = a + ih_1,\ i = 1,2,\ldots,N_1 - 1,\ N_1 h_1 = b - a,\ y = c + jh_2,\ j = 1,2,\ldots,N_2 - 1,\ N_2 h_2 = d - c\}$$

– множество внутренних узлов сетки. Множество граничных узлов γ_h представим в виде

$$\gamma_h = \gamma_h^1 + \gamma_h^2 + \gamma_h^3 + \gamma_h^4,$$

где

$\gamma_h^1 = \{(x,c),\ x = a + ih_1,\ i = 1,\ldots,N_1 - 1\}$ – граничные узлы, лежащие на нижней стороне,

$\gamma_h^2 = \{(x,d),\ x = a + ih_1,\ i = 1,\ldots,N_1 - 1\}$ – граничные узлы, лежащие на верхней стороне,

$\gamma_h^3 = \{(a,y),\ y = c + jh_2,\ j = 1,\ldots,N_2 - 1\}$ – граничные узлы, лежащие на левой стороне,

$\gamma_h^4 = \{(b,y),\ y = c + jh_2,\ j = 1,\ldots,N_2 - 1\}$ – граничные узлы, лежащие на правой стороне прямоугольника ∂D.

Далее будем использовать обозначения теории разностных схем из [6].

Обозначим

$$f_{\pm 1x} = f(x \pm h_1, y), \qquad f_{\pm 1y} = f(x, y \pm h_2).$$

Заменим дифференциальную задачу (4)-(8) конечно-разностной схемой:

$$\begin{aligned}
&(u^{\varepsilon}\omega^{\varepsilon})_{\overset{0}{x}} + (v^{\varepsilon}\omega^{\varepsilon})_{\overset{0}{y}} = \eta(\omega^{\varepsilon}_{\bar{x}x} + \omega^{\varepsilon}_{\bar{y}y}) - c^{\varepsilon}(x,y)(\omega^{\varepsilon} - v^{\varepsilon}_{\overset{0}{x}} + u^{\varepsilon}_{\overset{0}{y}}), && \\
&u^{\varepsilon}_{\bar{x}x} + u^{\varepsilon}_{\bar{y}y} - c^{\varepsilon}(x,y)(u^{\varepsilon} - U) = -\omega^{\varepsilon}_{\overset{0}{y}}, && \\
&v^{\varepsilon}_{\bar{x}x} + v^{\varepsilon}_{\bar{y}y} - c^{\varepsilon}(x,y)(v^{\varepsilon} - V) = \omega^{\varepsilon}_{\overset{0}{x}}, && (x,y) \in \omega_h, \\
&u^{\varepsilon} = U, && (x,y) \in \gamma_h, \\
&v^{\varepsilon} = V, && (x,y) \in \gamma_h, \\
&0,5(\omega^{\varepsilon} + \omega^{\varepsilon}_{+1y}) = -u^{\varepsilon}_{y} + p(x), && (x,y) \in \gamma_h^1, \\
&0,5(\omega^{\varepsilon} + \omega^{\varepsilon}_{-1y}) = -u^{\varepsilon}_{\bar{y}} + q(x), && (x,y) \in \gamma_h^2, \\
&0,5(\omega^{\varepsilon} + \omega^{\varepsilon}_{+1x}) = v^{\varepsilon}_{x} + r(y), && (x,y) \in \gamma_h^3, \\
&0,5(\omega^{\varepsilon} + \omega^{\varepsilon}_{-1x}) = v^{\varepsilon}_{\bar{x}} + s(y), && (x,y) \in \gamma_h^4.
\end{aligned}$$

Здесь

$$p(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,c) - \frac{h_2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,c),$$

$$q(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,d) + \frac{h_2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,d),$$

$$r(y) = -\frac{\partial U}{\partial y}(a,y) + \frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(a,y),$$

$$s(y) = -\frac{\partial U}{\partial y}(b,y) - \frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(b,y).$$

Разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу метода фиктивных областей (8)-(15) на точном решении с погрешностью $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Для решения нелинейной разностной задачи применяется итерационный процесс по нелинейности. На каждой итерации разностные задачи для $u^\varepsilon, v^\varepsilon, \omega^\varepsilon$ решаются попеременно-треугольным итерационным методом с модификацией для задач с разрывным коэффициентом $c^\varepsilon(x,y)$ [4,6,7].

4. Численное моделирование течений жидкости в областях со сложной границей

Для проверки численного метода решена тестовая задача для уравнений гидродинамики в квадрате с внутренним вырезом в виде круга с известным точным решением. Результаты расчетов тестовой задачи показали эффективность вычислительного алгоритма. Отличие приближенного решения от точного составило не более 3-4% при небольшом количестве узлов разностной сетки.

Предложенным методом проведены расчеты течений однородной вязкой несжимаемой жидкости в нерегулярных двумерных односвязных областях при различных геометриях области D_0 и режимах протекания жидкости через границу. Во всех расчетах параметр продолжения $\varepsilon = 10^{-10}$.

Для течений, изображенных на рис. 1-5, коэффициент вязкости жидкости $\eta = 0.1$, размеры прямоугольной области $a = 0$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 1$. На рис.1 представлены линии тока течения жидкости в области, часть границы которой представляет собой объединение двух прямоугольников. Граница области течения, изображенного на рис.2, имеет один участок втекания жидкости и два участка вытекания. На рис.3, 4, 5 показаны картины линий тока при обтекании выемки и тел с сечением в виде полукруга и круга. Течение жидкости в клине с подвижной верхней крышкой показано на рис. 6. Расчеты проводились при $\eta = 5.9$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 2$.

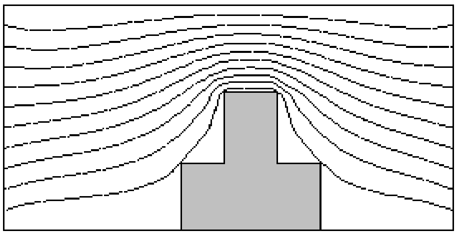

Рис. 1. Течение жидкости в области, часть границы которой представляет собой объединение двух прямоугольников.

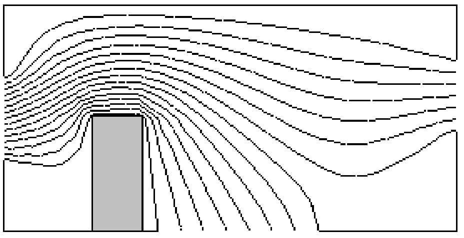

Рис. 2. Граница области имеет один участок втекания и два участка вытекания.

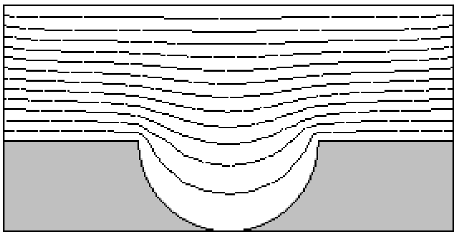

Рис. 3. Обтекание выемки с сечением в виде полукруга.

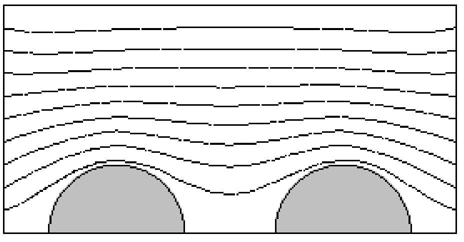

Рис. 4. Обтекание тел с сечением в виде полукруга.

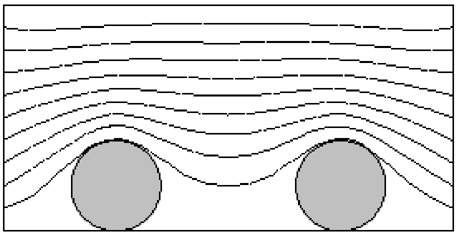

Рис. 5. Обтекание тел с сечением в виде круга.

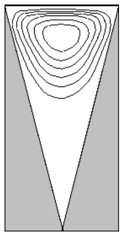

Рис. 6. Течение жидкости в клине с подвижной верхней крышкой.

5. Заключение

Для приближенного решения двумерных стационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости в переменных «скорость, завихренность» в нерегулярных областях применен метод фиктивных областей. Разработан итерационный численный конечно-разностный метод. Проведено тестирование численного метода на задаче с точным решением. Получены результаты численного моделирования конкретных течений жидкости в областях со сложными границами. Проведенные исследования показали эффективность и технологичность разработанного метода для численного моделирования течений вязкой жидкости в сложных областях.

Литература

[1] Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. – М.: Наука, 1986. – Т. VI. – 736с.
[2] Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552с.
[3] Кузнецов, Б.Г. О постановке задач гидродинамики м многосвязных областях / Б.Г. Кузнецов, В.П. Сироченко // Вычислительные технологии: Сб. научн. трудов. – Новосибирск, ИВТ СО РАН. – 1995. – Т. 4, № 12. С. 209-218.
[4] Вабищевич, П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / П.Н. Вабищевич. – М.: Издательство Моск. ун-та, 1991. . – 156 с.
[5] Смагулов, Ш. Численное исследование течений жидкости в нерегулярных областях / Ш. Смагулов, В.П. Сироченко, М.К. Орунханов. – Алматы: Издательство Казахского национального университета им. аль-Фараби, 2001. – 276 с.
[6] Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616с.
[7] Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.