ПРИМЕНЕНИЕ ФИНИТНЫХ ПОЛУОРТОГОНАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВЫХ ВЕЙВЛЕТОВ К ДЕКОРРЕЛЯЦИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

И.А. Блатов, Ю.А. Герасимова
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия

Рассматривается применение алгоритмов, основанных на финитных полуортогональных сплайновых вейвлетах, к ослаблению коррелированности дискретных случайных процессов. Формулируется теорема об оценках элементов полученной после преобразования корреляционной матрицы. Приводятся данные численных экспериментов.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, временные ряды, декорреляция, сплайновые вейвлеты.

Введение

В случае если сильная коррелированность создает значительные трудности при решении конкретных задач, используется прием, заключающийся в предварительном выполнении некоторого преобразования, целью которого является устранение или уменьшение корреляции исходных данных.

Большинство авторов рассматривают преобразования, обладающие ортогональностью [1,2]. Однако требование выполнения этого условия существенно сужает класс рассматриваемых преобразований.

Применив ортогональное преобразование Карунена-Лоэва можно получить наилучший результат в задаче устранения или ослабления коррелированности данных. Однако, в общем случае, переход к базису Карунена-Лоэва является трудной вычислительной задачей. Также, для этого базиса отсутствует возможность применения быстрых алгоритмов вычисления.

Эта возможность появляется при использовании сплайновых вейвлетов для полиномиальных и кусочно-полиномиальных функций, а для вейвлетов Добеши и многих других использование таких же эффективных алгоритмов затруднительно.

В настоящей работе для решения задачи ослабления корреляции рассмотрено применение финитных полуортогональных сплайновых вейвлетов. Получены оценки элементов корреляционных матриц после применения вейвлет-преобразования. Также приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие большую эффективность предложенного метода по сравнению с некоторыми ортогональными преобразованиями.

Полуортогональный сплайновые вейвлеты на целочисленных разбиениях

Пусть k, m- натуральные числа, $n = 2^k, [a,b] = [0,n], n_0$ - такое целое число, что $2^{n_0} \le 2m-1 < 2^{n_0+1}$. Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta_p, p = n_0, n_0+1, ...\}$ разбиений отрезка $[0,3]\Delta_p : 0 = t_0^p < t_1^p < ... < t_{2p}^p = n$ с постоянным шагом $h = h_p = 2^{k-p+n_0}$. На каждом из разбиений Δ_p рассмотрим пространство сплайнов $L_p = L_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus W_{n_0+2} \oplus ... \oplus W_p$, где через W_p обозначено ортогональное в смысле $L_2[0,n]$ дополнение пространства L_{k-1} до пространства L_p. Искомый вейвлет-базис будем строить как объединение базиса в L_{n_0} и всех базисов в пространствах $W_p, n_0 < p \le k$.

Зафиксируем некоторое целое $i \ge 0$, такое что $i + 2m - 1 \le 2^{p-1}$, т.е. отрезок $[t_i^{p-1}, t_{i+2m-1}^{p-1}]$ целиком содержится в $[0,n]$. Вейвлет-функцию будем искать в виде:

$$\psi_{i,p}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j N_{m-1,j,p} \tag{1}$$

где $N_{m-1,j,p}$ - нормализованные на разбиении Δ_p B-сплайны.

Коэффициенты α_j определяются из условия $\left(\psi_{i,p}(x), N_{m-1,k,p}\right) = 0, k = i - m + 1, ..., i + 2m - 2$.

Совокупность всех вейвлет-функций получается сдвигом и сжатием одной единственной функции $\psi_{0,n_0+1}(x)$. Подробно алгоритм построения вейвлет-функций изложен в [3].

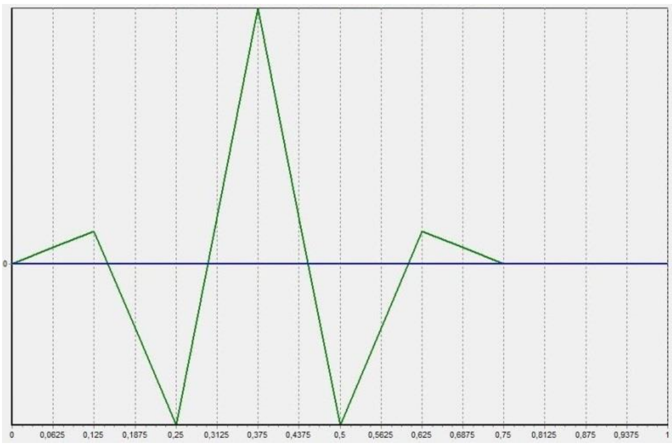

Рис.1. График вейвлет-функции для m=1

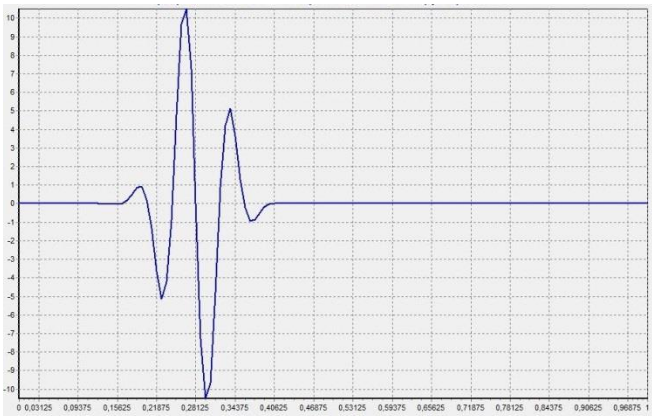

Рис.2. График вейвлет-функции для m=2

Оценки элементов корреляционных матриц

Пусть $X = \{X_i\}, 0 \le i \le n, n = 2^k$ - последовательность случайных величин. Для каждой реализации последовательности X обозначим через $PX(t) \in S(\Delta,2,1), t \in [0,n]$ интерполяционный сплайн первой степени (непрерывную ломанную), построенный по точкам $(t_i, X_i), 0 \le i \le n,$ где $t_{i=i}$. Рассмотрим $PX(t)$ как случайный процесс при $t \in [0,n]$. Через $K(t,\tau), t, \tau \in [0,n]$ обозначим его корреляционнцю функцию, а через $K \in \{k_{ij}\}$ корреляционную матрицу последовательности X.

Предположим, что корреляционная матрица имеет вид, характерный для самоподобного процесса $k_{ij} = \frac{\sigma^2}{2}\left((2+|i-j|)^{2H} - 2(1+|i-j|)^{2H} + (1+|i-j|)^{2H}\right) i \ne j, k_{ij} = \frac{\alpha^2}{2}$, где $H \in [0.5,1]$ - показатель Херста.

Определим преобразование случайной последовательности X формулой

$$Y_i = (TPX)_i, 0 \le i \le n$$

где T - дискретное вейлвет-преобразование в пространстве $S(\Delta,2,1)$.

Поставим задачу оценки элементов ковариационной матрицы $\tilde{K} = \{\tilde{k}_{ij}\}, \tilde{k}_{ij} = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j), 0 \le i, j \le n$ по заданной ковариационной матрице $K = \{k_{ij}\}, k_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$.

Введем в рассмотрение матрицу

$$\hat{K} = \{\hat{k}_{ij}, 0 \le i, j \le n\},$$

$$\hat{k}_{ij} = \mathrm{cov}((PX, \chi_i), (PX, \chi_j)) = \\ = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\chi_i(t)\chi_j(\tau)dtd\tau \tag{2}$$

где $K(t,\tau) = \mathrm{cov}(PX(t), PX(\tau))$.

Корреляционная матрица последовательности случайных величин Y имеет вид

$$\tilde{K} = \Gamma^{-1}\hat{K}\Gamma^{-1}$$

где Γ - матрица Грама вейвлет базиса.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема. Для элементов матрицы $\hat{K}$ справедливы оценки $(p \ge 2)$

$$\left|\hat{k}_{ij}^{pp+s}\right| \le C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{\left(1+\left|j-\frac{i}{2^s}\right|\right)^{2+\alpha}}$$

$$\left|\hat{k}_{ij}^{p+sp}\right| \le C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{\left(1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|\right)^{2+\alpha}}$$

При $p=1$ справедливы оценки

$$\left|\hat{k}_{ij}^{11+s}\right| \le C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-1)} 2^{-(3/2-\alpha)s}, \tag{3}$$

$$\left|\hat{k}_{ij}^{1+s1}\right| \le C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-1)} 2^{-(3/2-\alpha)s} \tag{4}$$

Следствие. Для элементов диагональных блоков $(s=0,\, p\ge 2)$ справедливы оценки

$$\left|\hat{k}_{ij}^{pp}\right| \le C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot \frac{1}{\left(1+\left|i-j\right|\right)^{2+\alpha}} \tag{5}$$

Оценка элементов матрицы $\tilde{K}$ вытекает из теоремы.

Также из вышеизложенного следует, что матрица $\tilde{K}$ является псевдоразреженной, т.е. в ней достаточное количество малых по модулю элементов.

Результаты численных экспериментов

Для экспериментальной части исследования были предоставлены последовательности сильнокоррелированных случайных величин, каждая из которых состояла из 9999 элементов. Последовательности были получены от специалистов теории массового обслуживания ПГУТИ (подробнее см. [4]).

К последовательностям были применены следующие виды преобразований: дискретное преобразование Фурье, преобразование Добеши, преобразование Хаара, преобразование на основе финитных полуортогональных сплайновых вейвлетов.

На основе экспериментальных данных были вычислены коэффициенты корреляции r и получена корреляционная матрица (подробнее см. [5]).

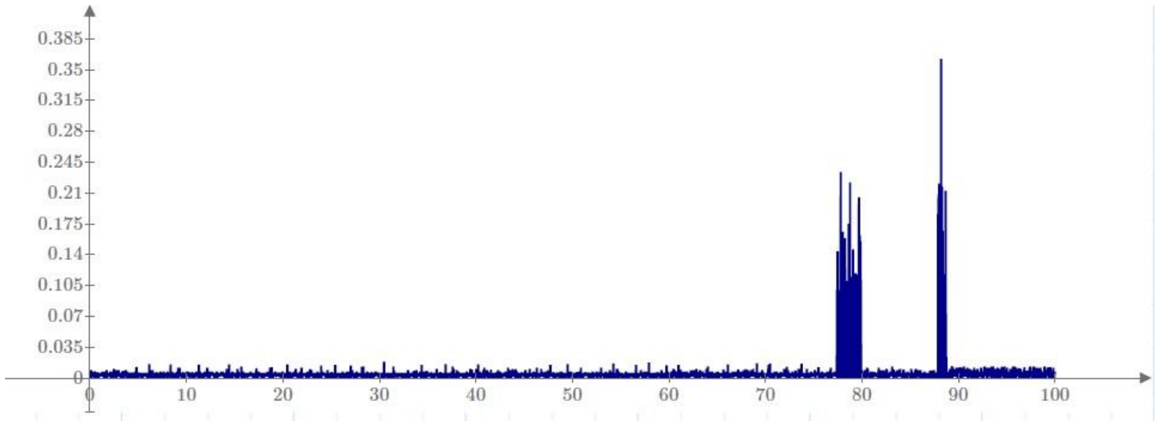

Рис.3. Последовательность экспериментальных данных

После каждого преобразования, применённого к исходным данным, была получена новая последовательность данных, для которых также были вычислены коэффициенты корреляции.

Для сравнения полученных результатов были вычислены суммы модулей коэффициентов корреляции.

Табл. Сравнение результатов преобразований

№	**Название**	$\sum_{i=0}^{N-1} \lvert r_i \rvert$
1	Исходная выборка	18.850
2	Дискретное преобразование Фурье	19.200
3	Преобразование Добеши (d4)	3.573
4	Преобразование Хаара	4.381
5	Сплайновое вейвлет-преобразование (m=1)	3.744

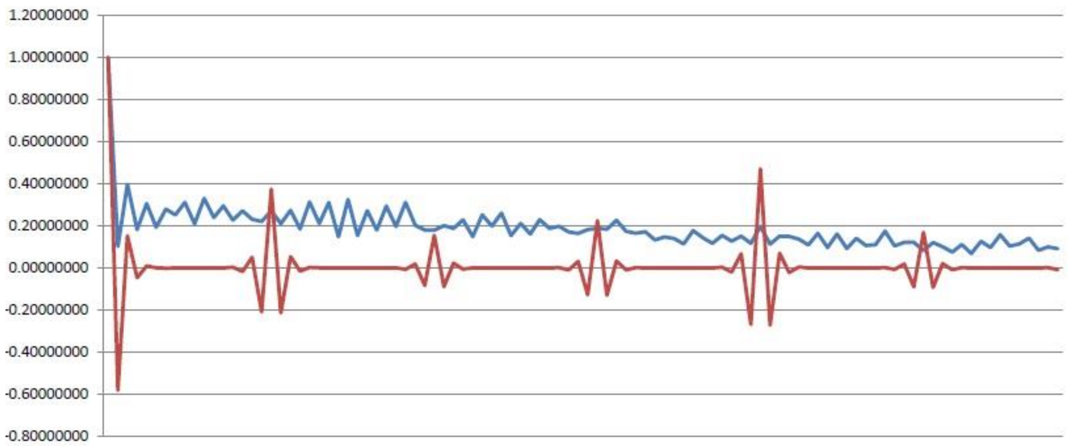

Рис.4. Сравнение коэффициентов корреляции для последовательности экспериментальных данных и для преобразованных данных (сплайновое вейвлет-преобразование (m=1))

Все вычисления были произведены в системах PTC Mathcad Prime 3.1 и Borland Delphi 7.0.

Заключение

В качестве резюме можно утверждать, что применение финитных полуортогональных сплайновых вейвлет-функций позволяет ослабить коррелированность последовательности сильнокоррелированных случайных данных. Также экспериментально была доказана высокая эффективность применения преобразования, основанного на таких функциях, по сравнению с другими, в том числе и ортогональными, преобразованиями.

Благодарности

Данные для численного эксперимента были предоставлены к.т.н., доцентом кафедры Теории передачи сигналов ПГУТИ Карташевским И.В.

Литература

1. Умняшкин, С.В. Анализ эффективности использования ортогональных преобразований для цифрового кодирования коррелированных данных / С.В. Умняшкин, М.Е. Кочетков // Известия вузов. Электроника. – 1998. - №6. – С. 79-84.
2. Beylkin, G. Fast wavelet transforms and numerical algorithms / G. Beylkin, R.Coifman, V. Rochlin //Comm. Pure. Appl. Math. -1991. –V.44. – P.141-183.
3. Блатов, И.А. Полуортогональные сплайновые вейвлеты и метод Галеркина численного моделирования тонкопроволочных антенн / И.А. Блатов, Рогова Н.В. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т.53, №5. – С.727-736.
4. Blatov, I. Application of fast discrete wavelet transformation on the basis of spline wavelet for loosening correlation of sequence of data in mass service theory/ I.Blatov, U.Gerasimova, I.Kartashevskiy, – URL: ceur-ws.org/Vol-1490/ (дата обращения 16.03.2016)
5. Карташевский, И.В. Расчет коэффициентов корреляции временных интервалов в последовательности событий // Журнал «Электросвязь». – 2012. -№10. – С.37-39.