Построение и идентификация параметров дискретной стохастической модели годового хода температуры воздуха

М.А. Шугурова
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова
Ульяновск, Россия
m.a.shugurova@gmail.com

А.В. Цыганов
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова
Ульяновск, Россия
andrew.tsyganov@gmail.com

***Аннотация*—В работе рассматривается задача построения математической модели годового хода температуры воздуха в классе линейных дискретных стохастических систем в пространстве состояний. Идентификация параметров построенной модели выполняется с использованием методов рекуррентной дискретной фильтрации. Приводятся результаты численных экспериментов по идентификации неизвестных параметров на основе данных атмосферных реанализов.**

Ключевые слова—годовой ход температуры воздуха, линейные дискретные стохастические системы, параметрическая идентификация, фильтр Калмана, атмосферные реанализы

1. Введение

Температуру воздуха принято считать одной из основных характеристик климата и погоды. Важной характеристикой изменения температуры воздуха является годовой ход температуры воздуха – изменение температуры воздуха в течение года. Математическое и компьютерное моделирование годового хода температуры воздуха находит применение в ЖКХ, строительстве, сельском хозяйстве. Например, различные модели годового хода температуры воздуха могут использоваться при расчетах воздушно-теплового режима помещений зданий и оценке годового энергопотребления [1].

Целью данной работы является построение математической модели годового хода температуры воздуха в классе линейных дискретных стохастических систем в пространстве состояний и идентификация параметров построенной модели с использованием методов рекуррентной дискретной фильтрации.

2. Моделирование годового хода температуры воздуха и идентификация параметров модели

Важным источником данных для изучения климата являются атмосферные реанализы – динамически разглаженные и согласованные данные определенного набора архивных наблюдений, полученные при помощи гидродинамической модели с фиксированной конфигурацией [2]. Данные многолетних наблюдений для разных местностей показывают, что годовой ход температуры воздуха носит ярко выраженный периодический характер, в котором могут быть выделены две составляющие: детерминированная (тренд), в основе которой лежат движение по орбите и наклон оси вращения Земли, и стохастическая, обусловленная множеством случайных факторов. В качестве примера рассмотрим данные реанализа NCEP [3] среднесуточной температуры воздуха на высоте 2 м в узле гауссовой сетки T62 с координатами (21, 18) за 2018–2020 гг., представленные на рис. 1.

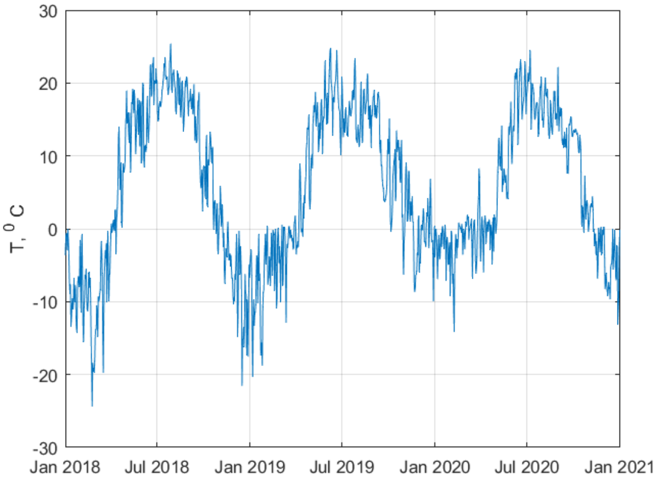

Рис. 1. Данные реанализа температуры воздуха

Для построения модели будем использовать подход, предложенный в [4] для моделирования данных суточной термометрии здорового человека. Разделим рассматриваемый процесс на следующие аддитивные составляющие: 1) $\bar{\theta}_t$ – математическое ожидание отклонения температуры от среднегодового уровня θ^*, 2) $\hat{\theta}_t \triangleq \{\hat{\theta}_t(\omega)\}$ – стохастический процесс с нулевым средним (ω – произвольная точка выборочного пространства Ω), 3) $\tilde{\theta}_t \triangleq \hat{\theta}_t + \theta^*$, для которого $d\tilde{\theta}_t = d\hat{\theta}_t$. Тогда $\theta_t \triangleq \bar{\theta}_t + \tilde{\theta}_t$ – суммарный процесс, моделирующий рассматриваемые данные.

Предположим, что тренд $\bar{\theta}_t$ удовлетворяет уравнению гармонического осциллятора:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, t \in [0; \infty), \\ z_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_t, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} A \sin\varphi \\ A\omega_n \cos\varphi \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\bar{\theta}_t \triangleq x_{1t} = A\sin(\omega_n t + \varphi), \ \ \bar{\omega}_t \triangleq x_{2t}, \ \ A = \sqrt{\bar{\theta}_0^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega_n}\right)^2},$$

$$\sin\varphi = \bar{\theta}_0 / A, \ \ \cos\varphi = \left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega_n}\right) / A, \ \ \mathrm{tg}\,\varphi = \bar{\theta}_0 / \left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega_n}\right).$$

Пусть $\hat{\theta}_t$ – экспоненциально коррелированный по времени случайный процесс с автокорреляцией $\Psi_{\hat{\theta}\hat{\theta}}(\tau) \triangleq \sigma^2 e^{-|\tau|/T}$, где T – интервал корреляции. Обозначим $\lambda = 1/T$, $\eta = \sigma\sqrt{2\lambda}$. Добавляя к (1) третью переменную $\tilde{\theta}_t$, получим следующую модель:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{bmatrix} w_t, \\ z_t = [1 \quad 0 \quad 1] x_t + v_t, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} A \sin\varphi \\ A\omega_n \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (2)$$

Дискретизируя модель (2), получаем:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} c & \dfrac{s}{\omega_n} & 0 \\ -\omega_n s & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} w_k, \\ z_k = [1 \quad 0 \quad 1] x_k + v_k, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} A \sin\varphi \\ A\omega_n \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \qquad k = 1,2,\ldots, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$d \triangleq e^{-\lambda\tau},\ a \triangleq 1 - d,\ \ b \triangleq \sigma\sqrt{1 - d^2},\ \ c \triangleq \cos\omega_n\tau\,,\ \ s \triangleq \sin\omega_n\tau.$$

Здесь x_k – вектор состояния, u_k – управляющее воздействие, z_k – измерения, τ – период дискретизации, w_k и v_k – независимые нормально распределенные случайные последовательности с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами $Q = 1$ и $R > 0$ соответственно).

Обозначим через $\theta = [A, \varphi, \lambda, \sigma]^T$ вектор неизвестных параметров модели (3). Для идентификации неизвестных параметров используем критерий идентификации в форме отрицательной логарифмической функции правдоподобия

$$\mathcal{J}_k(\theta) = \frac{Km}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left\{\ln|\Sigma_k(\theta)| + \|\nu_k(\theta)\|^2_{\Sigma_k^{-1}(\theta)}\right\}, \quad (4)$$

значения которого при заданном θ вычисляют с помощью дискретного фильтра Калмана. Критерий (4) находит широкое применение для решения задач параметрической идентификации дискретных стохастических систем в пространстве состояний [5].

3. Численный эксперимент

Идентифицируем параметры модели (3) по данным реанализа, представленным на рис. 1. Положим $\tau = 1$ день, $\omega_n = 2\pi/365{,}25$ день$^{-1}$. В качестве управляющего воздействия u_k возьмем среднее значение температуры воздуха за рассматриваемый период равное 5,54 °С. Для обработки данных реанализов и идентификации неизвестных параметров модели (3) использовалась программа [6]. Дополнительно в программе были реализованы: критерий идентификации (4) и процедура его минимизации на основе функции fmincon системы MATLAB.

В результате идентификации получены следующие значения: $A = 13{,}27$, $\varphi = 180{,}29$, $\lambda = 0{,}26$, $\sigma = 4{,}52$. На рис. 2 приведен пример компьютерного моделирования годового хода температуры воздуха при помощи модели (3) с использованием идентифицированных значений параметров.

Для проверки адекватности построенной модели была проведена серия из 1000 экспериментов по моделированию годового температуры воздуха в выбранном диапазоне дат. Результаты каждого эксперимента сравнивались с данными реанализа при помощи теста Колмогорова-Смирнова для двух выборок с уровнем значимости $\alpha = 0{,}001$. Общее количество принятых гипотез о принадлежности выборок одному распределению составило 91%.

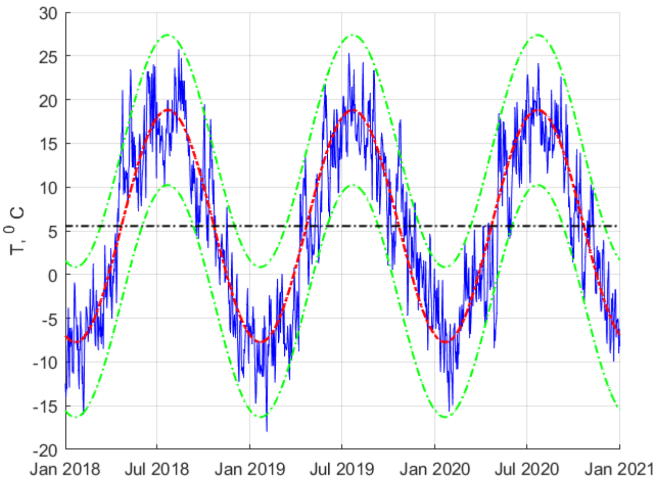

Рис. 2. Результаты компьютерного моделирования

4. Заключение

В работе рассмотрен подход к моделированию годового хода температуры воздуха в классе линейных дискретных стохастических систем в пространстве состояний. Идентификация параметров построенной модели выполнялась с использованием методов рекуррентной дискретной фильтрации на основе данных атмосферных реанализов. Полученные результаты демонстрируют работоспособность предложенного подхода.

Литература

[1] Самарин, О.Д. Вероятностно-статистическое моделирование годового хода температуры наружного воздуха и ее значений в теплый период / О.Д. Самарин // Вестник МГСУ. — 2018. — Т. 13, № 3. — С. 378–384.

[2] Гавриков, А. Атмосферные реанализы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ocean.ru/phocadownload/pl_univer/pl_univer_2019_01.pdf (21.12.2022).

[3] NOAA Physical Sciences Laboratory NCEP/DOE Reanalysis II [Electronic resource]. — Access mode: https://psl.noaa.gov/data/gridded/data.ncep.reanalysis2.html (06.11.2022)

[4] Semushin, I.V. Identification of a Simple Homeostasis Stochastic Model Based on Active Principle of Adaptation / I.V. Semushin, J.V. Tsyganova, A.G. Skovikov // Proceedings of International Conference Applied Stochastic Models and Data Analysis ASMDA 2013 & DEMOGRAPHICS 2013. — 2013. — P. 775–783.

[5] Gibbs, B. P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling: a practical handbook / B. P. Gibbs. — Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2011. — 632 p.

[6] Шугурова, М.А. Программа для чтения и обработки данных атмосферных реанализов / М.А. Шугурова, Д. В. Галушкина // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. — 2021. — Т. 1. — С. 137–143.