

Понижение размерности задач оптимального управления для моделей манипуляторов со слабой диссипацией

М.С. Осинцев^а, В.А. Соболев^б

^аNorth Carolina State University, Raleigh, NC 27695, USA

^бСамарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

Аннотация

В данной работе рассматривается метод понижения размерности задач оптимального управления для сингулярно возмущенных систем в критических случаях. Наличие нулевых собственных значений в спектре матрицы главных членов уравнения Риккати для оптимального линейно-квадратичного регулятора приводит к повышению размерности интегрального многообразия медленных движений. Предлагаемый подход продемонстрирован в задачах оптимального управления для моделей однозвенного гибкого манипулятора и манипулятора с гибким сочленением.

Ключевые слова: интегральное многообразие; линейно-квадратичное управление; робототехника

1. Введение

Одной из важнейших задач математического моделирования является построение новых простых математических моделей или упрощение существующих. Современный уровень развития вычислительных систем позволяет решать многие прикладные задачи с высокой точностью за достаточно малый промежуток времени. Однако, несмотря на огромное количество разработанных методов оптимизации вычислений, а также быстрое развитие вычислительной техники, во многих случаях скорость проведения необходимых расчетов остается недостаточной. Причиной тому могут служить ограничения, накладываемые на вычислительную систему по различным параметрам: весу, размерам, стоимости. Наличие этих ограничений связано с областью применения вычислительных систем. В авиационной и космической технике применение крупногабаритных компьютеров для проведения сложных вычислений является неприемлемым. При этом следует понимать, что объемы необходимых вычислений в основном зависят от вычислительной сложности используемого алгоритма для решений той или иной задачи, а также от размерности математической модели, которая описывает объект. На практике, достаточно точная математическая модель может состоять из десятков и даже сотен параметров, описывающих состояние объекта. Работа с такими моделями и решение практических задач на бортовом компьютере мобильных устройств невозможно, поэтому задача разработки быстрых вычислительных алгоритмов остается весьма актуальной.

Известно, что широкий круг процессов различной природы характеризуется существенным различием в скоростях изменения переменных, поэтому в качестве динамических моделей таких процессов используются дифференциальные системы, содержащие малый параметр при части производных. Использование сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений характерно для описания систем со слабой диссипацией энергии, таких как навигационные приборы и робототехнические устройства.

Решение задач управления для таких систем в свою очередь приводит к необходимости решения сингулярно возмущенных дифференциальных систем Риккати высокой размерности. В связи с этим возникает необходимость в использовании значительных вычислительных ресурсов, что на практике нежелательно и не всегда возможно, особенно в авиационной и космической технике.

Исследованию задач управления с сингулярными возмущениями посвящено значительное число публикаций (см. [1, 2, 3, 4]). При этом в большинстве работ (например, [1, 2, 3, 4, 5]) применяется метод пограничных функций Васильевой-Тихонова. Наряду с методом пограничных функций для исследования таких задач успешно применяются метод усреднения [6, 7], методы декомпозиции [8, 9, 10, 11] и метод интегральных многообразий [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. В данной работе область применения метода интегральных многообразий расширяется на системы со слабой диссипацией. Предложенный подход позволяет понизить размерность рассматриваемой системы и сконструировать управляющие алгоритмы, требующие значительно меньше вычислительных ресурсов.

2. Задача оптимального оценивания для сингулярно возмущенной системы

2.1. Приведение системы к специальному виду

Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления для динамической системы, движение которой описывается следующим уравнением:

$$\varepsilon \dot{x} = A(t, \varepsilon)x + B(t, \varepsilon)u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in R^{n+m}$ - вектор состояния, $u \in R^r$ - вектор управляющих воздействий, ε - малый положительный параметр, $t \in [0, 1]$. Управление требуется выбрать таким образом, чтобы минимизировать функционал вида

$$J = \frac{1}{2}x^T(1)Fx(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right) dt. \quad (2)$$

Предполагается, что матрицы A, B, Q, R, F достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по t при $t \in [0, 1]$ и могут быть представлены в следующей форме

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon A_1 & \varepsilon A_2 \\ \varepsilon A_3 & A_4 + \varepsilon A_5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \varepsilon B_1 \\ \varepsilon^2 B_2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2^T & F_3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $A_1, F_1, Q_1 \in R^{m \times m}$; $A_2, F_2, Q_2 \in R^{m \times n}$; $A_3, F_4 \in R^{m \times m}$; $A_4, A_5, F_4, Q_3 \in R^{n \times n}$; $B_1 \in R^{m \times r}$; $B_2 \in R^{n \times r}$; $R \in R^{r \times r}$. Будем предполагать, что все матрицы представимы в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε :

$$A_i(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j A_{ij}(t), \quad i = \overline{1, 5}; \quad B_i(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j B_{ij}(t), \quad i = 1, 2;$$

$$Q_i(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j Q_{ij}(t), \quad i = \overline{1, 3}; \quad R(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j R_j(t); \quad F_i(\varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j F_{ij}, \quad i = \overline{1, 3},$$

с достаточно гладкими по t матричными коэффициентами при $t \in [0, 1]$. Таким образом, первые m компонент вектора x - это медленные переменные, а остальные n - быстрые переменные. Закон оптимального управления так же может быть записан в блочном виде:

$$u = -R^{-1} \begin{pmatrix} B_1^T & \varepsilon B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & \varepsilon K_2 \\ \varepsilon K_2^T & \varepsilon K_3 \end{pmatrix} x.$$

Матрицы K_1, K_2, K_3 удовлетворяют следующей дифференциальной системе Риккати:

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= -K_1 A_1 - K_2 A_3 - A_1^T K_1 - A_3^T K_2^T + K_1 S_1 K_1 + \varepsilon (K_2 S_2^T K_1 + K_1 S_2 K_2^T) + \varepsilon^2 K_2 S_3 K_2^T - Q_1, \\ \varepsilon \dot{K}_2 &= -K_2 (A_4 + \varepsilon A_5) - \varepsilon (K_1 A_2 + A_1^T K_2 + A_3^T K_3 - K_1 S_1 K_2) + \varepsilon^2 (K_2 S_2^T K_2 + K_1 S_2 K_3) + \varepsilon^3 K_2 S_3 K_3 - \varepsilon Q_2, \\ \varepsilon \dot{K}_3 &= -K_3 A_4 - A_4^T K_3 - \varepsilon (K_3 A_5 + A_5^T K_3 + K_2^T A_2 + A_2^T K_2 - K_2^T S_1 K_2) + \\ &\quad + \varepsilon^2 (K_3 S_2^T K_2 + K_2^T S_2 K_3) + \varepsilon^3 K_3 S_3 K_3 - \varepsilon Q_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $S_1 = B_1 R^{-1} B_1^T$; $S_2 = B_1 R^{-1} B_2^T$; $S_3 = B_2 R^{-1} B_2^T$, с граничными условиями $K_1(1, \varepsilon) = F_1$; $K_2(1, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} F_2$; $K_3(1, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} F_3$.

Рассмотрим третье уравнение в представленной системе. При $\varepsilon = 0$ это уравнение принимает следующий вид:

$$-K_3 A_4 - A_4^T K_3 = 0.$$

Введем в рассмотрение следующий линейный оператор:

$$LX = XA_4 + A_4^T X.$$

Мы рассматриваем системы в критическом случае, для которых собственные числа матрицы A_4 являются чисто мнимыми. В книге [20] показано, что спектр линейного оператора L состоит из сумм собственных чисел матрицы A_4 . В этом случае спектр такого линейного оператора имеет нулевые элементы, которые образуются при сложении комплексно сопряженных чисто мнимых чисел. Рассматриваемая задача в этом смысле является вдвойне критической.

Приведем полученные уравнения к векторному виду. Для этого введем векторы $k_1 \in R^{m(m+1)/2}$, $k_3 \in R^{n(n+1)/2}$, которые состоят из элементов матриц K_1, K_3 , расположенных выше главной диагонали, записанных по столбцам. Вектор $k_2 \in R^{mn}$ состоит из элементов матрицы K_2 , записанных по столбцам. Обозначим через $U_i(x)$ векторы, элементами которых являются квадратичные формы вектора x , а через $W_i(x, y)$ векторы состоящие из билинейных форм векторов x и y .

Пусть векторы $s_1 \in R^{m(m+1)/2}$, $s_3 \in R^{n(n+1)/2}$ состоят из элементов матриц Q_1, Q_3 , расположенных выше главной диагонали, записанных по столбцам, а вектор $s_2 \in R^{mn}$ состоит из элементов матрицы Q_2 , записанных по столбцам.

В этом случае система (4) может быть приведена к векторному виду

$$\dot{k}_1 = -V_1 k_1 - V_2 k_2 + U_1(k_1) + \varepsilon W_1(k_1, k_2) + \varepsilon^2 U_2(k_2) - s_1, \quad (5)$$

$$\varepsilon \dot{k}_2 = -V_3 k_2 - \varepsilon (V_4 k_1 + V_5 k_2 + V_6 k_2 - W_2(k_1, k_2)) + \varepsilon^2 (U_3(k_2) + W_3(k_1, k_3)) + \varepsilon^3 W_4(k_2, k_3) - \varepsilon s_2, \quad (6)$$

$$\varepsilon \dot{k}_3 = -V_7 k_3 - \varepsilon (V_8 k_2 + V_{20} k_3 - U_4(k_2)) + \varepsilon^2 W_5(k_2, k_3) + \varepsilon^3 U_5(k_3) - \varepsilon s_3. \quad (7)$$

Главный член в правой части последнего уравнения $-V_7 k_3$. Спектр матрицы V_7 совпадает со спектром оператора L . Это означает, что спектр матрицы V_7 содержит нулевое собственное значение. Предположим, что этому собственному значению соответствует p линейно независимых собственных векторов. Пусть D_1^T — $(r \times p)$ -матрица, где $r = m(m+1)/2$, столбцами которой являются p линейно независимых собственных векторов матрицы V_7^T . А D_2^T — такая $(r \times (r-p))$ -матрица, что (D_1^T, D_2^T) - невырожденная матрица. Тогда

$$V_7^T \begin{pmatrix} D_1^T & D_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z^T \end{pmatrix}, \quad DV_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Таким образом, умножение матриц D и V_7 выделяет нулевой блок размером $((r-p) \times r)$ и ненулевой $(p \times r)$ блок Z . При этом ранг матрицы Z равен $(r-p)$.

Умножив левую и правую части третьего уравнения (7) на D слева, получим:

$$\varepsilon D \dot{k}_3 = -DV_7 k_3 - \varepsilon D (V_8 k_2 + V_{20} k_3 - U_4(k_2)) + \varepsilon^2 DW_5(k_2, k_3) + \varepsilon^3 DU_5(k_3) - \varepsilon D s_3. \quad (9)$$

Разобьем вектор Dk_3 на два вектора: $k_4 \in R^p$ и $k_5 \in R^{r-p}$ так, что

$$Dk_3 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \end{pmatrix}.$$

В этом случае уравнение (9) разобьется на два. При этом, ввиду преобразования (8), в уравнении для k_4 будут отсутствовать в правой части члены, не содержащие малого параметра ε . Левую и правую части уравнения можно сократить на малый параметр, в результате чего уравнение для k_4 оказывается не сингулярно возмущенным. Для удобства дальнейшего рассмотрения переобозначим медленные переменные через x , а быстрые через y . Тогда система примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -G_1x - G_2y + U_{13}(x) + U_{14}(y) + \varepsilon(W_{18}(x, y) + \\ &\quad + U_{21}(y)) + \varepsilon^2(U_{15}(y) + U_{16}(x) + W_{20}(x, y)) - s_6 \\ \varepsilon\dot{y} &= -G_3x - G_4y + \varepsilon(-G_5x - G_6y + W_{21}(x, y) + U_{17}(y) - s_7) + \\ &\quad + \varepsilon^2(U_{22} + W_{23}(x, y) + U_{25}(y)) + \varepsilon^3(U_{19}(x) + U_{26}(y) + W_{24}(x, y)), \end{aligned}$$

где x - вектор размерности $n(n+1)/2 + (r-p)$, а вектор y имеет размерность $mn + m(m+1)/2 - (r-p)$.

2.2. Асимптотическое разложение интегрального многообразия

Предположим, что у этой системы есть интегральное многообразие медленных движений $h(t, x, \varepsilon)$. Известно, что интегральное многообразие медленных движений допускает представление в виде разложения по степеням малого параметра [21]. Перейдем в область первого приближения этого многообразия. Рассмотрим второе уравнение в системе (10) при $\varepsilon = 0$, получим $0 = -G_3x - G_4y$, откуда следует выражение для нулевого приближения интегрального многообразия:

$$h_0 = -G_4^{-1}G_3x. \quad (10)$$

Далее найдем второй член в асимптотическом разложении интегрального многообразия по степеням малого параметра:

$$h_1 = -G_4^{-2}G_3G_1x + G_4^{-2}G_3G_2G_4^{-1}x + G_4^{-2}G_3U_{13}(x) - G_4^{-2}G_3U_{14}(-G_4^{-1}G_3x). \quad (11)$$

Сделаем замену переменных $y = z + h_0 + \varepsilon h_1$. Получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G_9x - G_2z - s_6 + U_{13}(x) - U_{14}(z - G_4^{-1}G_3x + \varepsilon(G_7x + V(t, x))) + \\ &\quad \varepsilon(G_8x - G_2V(t, x) + W_{18}(x, z) + U_{34}(x) + U_{21}(z) + W_{25}(z, -G_4^{-1}G_3x) + U_{35}(x)) + \varepsilon^2Z_1(t, x, z), \\ \varepsilon\dot{z} &= -G_4z - \varepsilon(G_4^{-1}G_3G_2 + G_6)z + \varepsilon(W_{24}(x, z) + U_{27}(z)) + \varepsilon^3Z_2(t, x, z), \end{aligned}$$

где

$$V(t, x) = G_4^{-2}G_3U_{13}(x) - G_4^{-2}G_3U_{30}(x) + G_4^{-1}U_{31}(x) + G_4^{-1}U_{32}(x) - s_8.$$

Рассмотрим скалярное уравнение Риккати $G_9x - s_6 + U_{38}(x) = 0$. Предположим, что у этого уравнения есть положительное решение x_1 . Делаем замену переменных $x = \bar{x} + x_1$. Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (G_9 + G_{11})\bar{x} + (G_{12} - G_2)z + U_{38}(\bar{x}) - U_{36}(z) + W_{29}(z, \bar{x}) - \varepsilon Z_3(t, \bar{x}, z) + \varepsilon^2 Z_4(t, \bar{x}, z), \\ \varepsilon\dot{z} &= -(G_4 + \varepsilon(G_4^{-1}G_3G_2 + G_6 - G_{13}))z + \varepsilon U_{27}(z) + \varepsilon W_{31}(\bar{x}, z) + \varepsilon^2 Z_5(t, \bar{x}, z). \end{aligned} \quad (12)$$

3. Задача оптимального управления для моделей гибких манипуляторов

3.1. Однозвенный манипулятор с гибким звеном

Однозвенный гибкий манипулятор состоит из основания, содержащего привод, к которому посредством сочленения присоединено гибкое звено, имеющее на конце захват. Линейная динамическая модель модели гибкого манипулятора с учетом нулевой и первой гибких мод, имеет вид [22]:

$$\dot{\chi} = A\chi + Bu$$

с соответствующими матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -bJ_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & -\frac{\hat{\omega}_1^2}{\varepsilon} & -2\hat{\zeta}_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ hJ_1 \\ 0 \\ \varepsilon\varphi_1'h \end{pmatrix}, \quad \chi(0) = \chi_0,$$

где J_1 - момент инерции, b - коэффициент трения в приводе, φ_1 - первая собственная функция звена, h - коэффициент перед управляющим воздействием. Малый параметр ε возникает в системе ввиду того, что первая собственная частота колебаний манипулятора ω достаточно велика и малый параметр может быть введен следующим образом $\omega = \hat{\omega}_1/\varepsilon$. Коэффициент

затухания колебаний ζ при этом достаточно мал, поэтому можно также сделать замену $\hat{\zeta}_1 = \zeta\omega/\varepsilon$. Рассмотрим задачу оптимального линейно-квадратичного управления для этой системы. Функционал качества зададим в следующем виде

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (\chi^T Q \chi + u^T R u) dt, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix}, \quad R = r.$$

Отметим, что эта система совпадает с системой (1)-(3). Для решения задачи оптимального управления следует решить систему дифференциальных уравнений (4). Пусть элементы матрицы усиления линейно-квадратичного регулятора обозначены следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_3 & k_6 \\ k_1 & k_2 & k_4 & k_7 \\ k_3 & k_4 & k_5 & k_8 \\ k_6 & k_7 & k_8 & k_9 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Далее переходим от системы матричных уравнений к системе линейных. Тогда матрица V_7 в уравнении (7) будет иметь следующий вид

$$V_7 = \begin{pmatrix} 0 & -2\hat{\omega}_1^2 & 0 \\ 1 & 0 & -\hat{\omega}_1^2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица содержит одно нулевое собственное значение. Это означает, что линейная комбинация двух уравнений должна дать новую медленную переменную. Преобразование D в уравнении (8) выглядит как:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \hat{\omega}_1^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение для новой медленной переменной $k_{10} = k_5 + \hat{\omega}_1^2 k_9$ выглядит следующим образом:

$$\dot{k}_{10} = 4\hat{\zeta}_1 \hat{\omega}_1^2 k_9 - q_3 - q_4 \hat{\omega}_1^2 + h^2 r_1 J_1^2 (\hat{\omega}_1^2 k_7^2 + k_4^2) + 2\varepsilon r_1 J_1 \varphi_1'(0) h^2 (\hat{\omega}_1^2 k_7 k_9 + k_4 k_8) + \varepsilon^2 r_1 h^2 (\varphi_1'(0))^2 (\hat{\omega}_1^2 k_9^2 + k_8^2).$$

Дальнейшими преобразованиями возможно приведение системы к виду (10), где вектор x имеет размерность равную четырем, а вектор y - шесть. Итого получили, что в системе Риккати имеется четыре медленных переменных и шесть быстрых.

Построение интегрального многообразия медленных движений при помощи асимптотического разложения по степеням малого параметра с точностью до $O(\varepsilon^4)$ приводит к следующим результатам. Выражение для медленных переменных на интегральном многообразии:

$$f(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} J_1^2 h^2 r_1 x_2^2 - q_1 \\ J_1 b x_2 - x_1 + J_1^2 h^2 r_1 x_2 x_3 \\ 2J_1 b x_3 - 2x_2 - q_2 + J_1^2 h^2 r_1 x_3^2 \\ 2\hat{\zeta}_1 x_4 - q_3 - q_4 \hat{\omega}_1^2 + \frac{\varepsilon^2}{4\hat{\omega}_1^2} (h^2 r_1 (\varphi_1'(0))^2 x_4^2 - 8\hat{\zeta}_1^2 q_3) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^4). \quad (14)$$

При этом быстрые переменные выражаются через медленные:

$$h(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^2}{2\hat{\omega}_1^2} (v x_2 x_4) \\ \frac{\varepsilon^2}{2\hat{\omega}_1^2} (v x_3 x_4) \\ -\varepsilon^3 \frac{v}{4\hat{\omega}_1^4} ((\hat{\omega}_1^2 q_4 + 3q_3)x_2 + 2x_1 x_4 - 2(\hat{\zeta}_1 + J_1 b)x_2 x_4) \\ -\varepsilon^3 \frac{v}{4\hat{\omega}_1^4} ((\hat{\omega}_1^2 q_4 + 3q_3)x_3 + 2x_2 x_4 + 3q_3 x_3 - 2(\hat{\zeta}_1 + J_1 b)x_3 x_4) \\ \frac{\varepsilon}{4\hat{\omega}_1^2} (q_3 - \hat{\omega}_1^2 q_4 + 2\hat{\zeta}_1 x_4) - \frac{\varepsilon^3}{16\hat{\omega}_1^4} (8\hat{\zeta}_1^2 q_3 - (\varphi_1'(0))^2 h^2 r_1 x_4^2) \\ \frac{x_4}{2\hat{\omega}_1^2} - \varepsilon^2 \frac{\hat{\zeta}_1 q_3}{2\hat{\omega}_1^4} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^4), \quad (15)$$

где $v = J_1 \varphi_1'(0) h^2 r_1$. В системе (14) уравнение для четвертой переменной не содержит других переменных, а это значит, что решение для него можно найти отдельно. Точное решение для дифференциального уравнения, описывающего поведение четвертой медленной переменной на интегральном многообразии имеет вид

$$x_4 = \frac{4\hat{\omega}_1^2}{(\varphi'_1(0))^2 \varepsilon^2 h^2 r_1} \left(K \frac{e^{2K(t+C)} - 1}{e^{2K(t+C)} + 1 - \hat{\xi}_1} \right), \quad (16)$$

где

$$C = \frac{1}{2K} \ln \left(\frac{K + \hat{\xi}}{K - \hat{\xi}} \right), \quad K = \sqrt{\hat{\xi}^2 + \frac{1}{4\hat{\omega}^2} f^2 \varepsilon^2 h^2 r \left(q_3 + \hat{\omega}^2 q_4 + \varepsilon^2 \frac{2\hat{\xi}^2 q_3}{\hat{\omega}^2} \right)}. \quad (17)$$

В дифференциальной системе, где правая часть имеет вид (14), остаются только три первых уравнения. Матрицы A , B , Q , R в этом случае имеют простой вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -Jb \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ Jh \end{pmatrix}, \quad R = r_1, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

с функционалом качества

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\chi^T Q \chi + u^T R u \right) dt, \quad \chi = (\chi_1 \ \chi_2)^T.$$

Получили, что уравнения на многообразии в этом случае описывают уравнения для матрицы K модели без учета гибких мод. Четвертая переменная (16), не связанная с первыми тремя, является поправкой, которая позволяет учесть гибкость однозвенного манипулятора.

3.2. Однозвенный манипулятор с гибким сочленением

Манипулятор с гибким сочленением представляет собой жесткую штангу, один из концов которой прикреплен к валу двигателя при помощи упругого сочленения. В отличие от работы [23], мы рассматриваем движение системы в условиях наличия вязкого трения:

$$\dot{\chi} = A\chi + Bu, \quad (18)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & -\varphi\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\varepsilon \\ -\varepsilon I\beta\mu & 0 & -\gamma/\varepsilon - \varepsilon I\varphi & -c\gamma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ -\varepsilon I_m \end{pmatrix}, \quad \chi(0) = \chi_0, \quad (19)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{J_1 + J_m}, \quad \beta = Mgl\alpha, \quad \gamma = \frac{1}{\alpha J_1 J_m}, \quad I = \frac{1}{J_1}, \quad I_m = \frac{1}{J_m}, \quad \varphi = \beta I_m, \quad \mu = \frac{1}{\alpha}, \quad (20)$$

J_m – момент инерции двигателя, установленного в основании; J_1 – момент инерции звена; M, l – масса и длина звена соответственно; c – коэффициент затухания, k – жесткость гибкого сочленения, u – внешнее управляющее воздействие. На практике, гибкое сочленение может представлять собой металлическую пружину или упругий шарнир, обладающий достаточно большой жесткостью, поэтому в системе появляется малый параметр, значение которого задается выражением $\varepsilon^2 = 1/k$. Рассмотрим для этой системы задачу оптимального управления на конечном промежутке времени с функционалом качества

$$J = \frac{1}{2} \chi^T(1) F_x \chi(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\chi(t)^T Q_x \chi(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt, \quad (21)$$

где

$$Q_x = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & v_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon v_1 & 0 & v_4 \\ v_2 & 0 & v_3 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & v_5/\varepsilon \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & \alpha J_m f_0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & \alpha J_m f_1/\varepsilon \\ \alpha J_m f_0 & 0 & \alpha^2 J_m^2 f_0 & 0 \\ 0 & \alpha J_m f_1/\varepsilon & 0 & \alpha^2 J_m^2 f_1/\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad R = r. \quad (22)$$

со следующими обозначениями:

$$v_0 = q_0 + q_2, \quad v_1 = \frac{1}{\varepsilon}(q_1 + q_3), \quad v_2 = \frac{J_m q_0 - J_1 q_2}{J_1 + J + m}, \quad v_3 = \frac{J_m^2 q_0 + J_1^2 q_2}{(J_1 + J_m)^2}, \quad v_4 = \frac{J_m q_1 - J_1 q_3}{\varepsilon(J_1 + J_m)}, \quad v_5 = \frac{J_m^2 q_1 + J_1^2 q_3}{\varepsilon(J_1 + J_m)^2}.$$

Заметим, что постановка задачи оптимального управления для системы (18) с функционалом качества (21) и матрицами (22) полностью соответствует постановке задачи управления (1)-(3). Далее мы будем считать, что величина f_1 имеет порядок ε^2 , а так же для упрощения последующих выкладок введем величину $r_1 = 1/r$.

Отметим, что эта система также совпадает с системой (1)-(3). Для решения задачи оптимального управления следует решить систему дифференциальных уравнений (4). Используя методику, описанную выше, можно показать, что система

дифференциальных уравнений Риккати состоит из четырех медленных переменных и шести быстрых. Построим интегральное многообразие медленных движений с точностью $O(\varepsilon^2)$. Уравнения для медленных переменных имеют вид:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -v_0 + 2\beta x_2 + \alpha^2 r_1 x_2^2 + \frac{2\varepsilon^2}{\gamma} (I_m r_1 \alpha^2 \varphi x_2^2 - \alpha(I_m v_2 r_1 + I\beta\mu\varphi)x_2 + I\mu\beta v_2) \\ \beta x_3 - x_1 + \alpha^2 r_1 x_2 x_3 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{\gamma} (2I_m \alpha \varphi r_1 x_2 x_3 - I_m r_1 v_2 x_3 - I\mu\beta\varphi x_3) \\ \alpha^2 r_1 x_3^2 - 2x_2 - \varepsilon v_1 + \frac{2\varepsilon^2}{\gamma} I_m \alpha^2 \varphi r_1 x_3^2 \\ \gamma c x_4 - \gamma v_5 + \varepsilon \left(\frac{I_m^2 r_1 x_4^2}{4\gamma} - v_3 \right) - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} I\varphi v_5 + 2\alpha\varphi v_4 \right) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3). \quad (23)$$

Выражения для быстрых переменных на интегральном многообразии выглядят следующим образом:

$$h(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2\gamma} (I\mu\beta - I_m \alpha r_1 x_2) x_4 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} (\gamma c v_2 - \alpha\varphi x_1 - \alpha\varphi\gamma c x_2) \\ -\frac{\varepsilon}{2\gamma} (2\gamma v_4 + I_m \alpha r_1 x_3 x_4) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} (v_2 + \alpha\varphi x_2 + \alpha\varphi\gamma c x_3) \\ h^{[3]}(x) \\ h^{[4]}(x) \\ \frac{x_4}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4\gamma} I\varphi x_4 \\ \frac{\varepsilon}{4} (c x_4 - v_5) + \frac{\varepsilon^2}{8\gamma^2} I_m^2 r_1 x_4^2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$h^{[3]}(x) = \frac{\varepsilon}{\gamma} (v_2 - \alpha\varphi x_2) + \frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2} (4\gamma\beta v_4 - I\mu\gamma\beta v_5 + \alpha\gamma r_1 (4\alpha v_4 + I_m v_5) x_2 + 2I_m \alpha r_1 x_1 x_4 + I\mu\gamma\beta c x_4 - I_m \alpha\gamma c r_1 x_2 x_4), \quad (25)$$

$$h^{[4]}(x) = -\frac{\varepsilon}{\gamma} \alpha\varphi x_3 + \frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2} (\alpha\gamma r_1 (4\alpha v_4 + I_m v_5) x_3 + 2I\mu\beta x_4 + 2I_m \alpha r_1 x_2 x_4 - I_m \alpha\gamma c r_1 x_3 x_4). \quad (26)$$

Важно отметить, что дифференциальное уравнение для k_3 является изолированным и его решение можно найти точно. Решение на интегральном многообразии для этой медленной переменной имеет вид:

$$x_4 = \frac{\sigma}{a} \left(\frac{2c_1 e^{2\sigma t}}{1 + 2c_1 e^{2\sigma t} - 1} \right) + \frac{b}{2a}, \quad (27)$$

где

$$a = \varepsilon I_m^2 / (4\gamma r), \quad b = \gamma c, \quad \sigma = \sqrt{b^2/4 - ac_0}, \quad c_0 = -\gamma v_5 - \varepsilon v_3 - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} I\varphi v_5 + 2\alpha\varphi v_4 \right), \quad c_1 = \frac{2b}{2\sigma + b} - 1.$$

Таким образом, для расчета на многообразии медленных движений матрицы $K(t)$ коэффициента усиления линейно-квадратичного регулятора, достаточно решать систему дифференциальных уравнений третьего порядка, состоящую из уравнений для $x_1(t) - x_3(t)$. Остальные элементы этой матрицы вычисляются через выражения быстрых переменных на многообразии и уравнение (27).

Исходя из вида системы (23) с учетом, что третье уравнение является независимым, по первым трем уравнениям можно восстановить задачу управления, для которой первые три уравнения в системе (23) будут уравнениями Риккати для коэффициента усиления линейно-квадратичного регулятора. Иными словами, получить некоторую корректировку жесткой системы. Такая скорректированная задача управления имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A_c \chi + B_c u, \\ A_c &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta + \frac{\varepsilon^2 \alpha}{\gamma} (I_m v_2 r_1 - I\mu\beta\varphi) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{1 + \varepsilon^2 \alpha J_1 \varphi} \end{pmatrix}, \\ Q_c &= \begin{pmatrix} v_0 - \varepsilon^2 J_m \beta v_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon v_1 \end{pmatrix}, \quad F_c = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & f_1 \end{pmatrix}, \quad R_c = r. \end{aligned}$$

с функционалом качества

$$J = \frac{1}{2} \chi^T(1) F_c \chi(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\chi^T(t) Q_c \chi(t) + u^T(t) R_c u(t) \right) dt.$$

4. Численное моделирование

Для сравнения работы двух управляющих воздействий, была написана программа в математическом пакете MATLAB, которая позволяет провести численное моделирование движений однозвенного гибкого манипулятора и манипулятора с гибким сочленением под воздействием управляющих воздействий.

На рисунке 1-а) представлены графики движения захвата однозвенного гибкого манипулятора под воздействием двух различных управлений: первое рассчитано по полной системе дифференциальных уравнений Риккати для матрицы усиления K (черный график), второе управление (серый график) рассчитано таким образом, что решение системы дифференциальных уравнений Риккати ищется на интегральном многообразии согласно формулам (14)-(15). На графике также представлена траектория движения захвата при свободном движении манипулятора (серый пунктир). Управление на многообразии приводит систему в область начала координат быстрее, чем исходное полное управляющее воздействие, при этом количество вычислительных операций для построения управления на многообразии значительно меньше ввиду меньшей размерности дифференциальной системы.

На рисунке 1-б) показана траектория движения манипулятора с гибким сочленением при отсутствии управляющего воздействия (серый пунктир). Черная кривая представляет собой траекторию движения захвата манипулятора под действием управляющего воздействия, коэффициент усиления которого рассчитывается с помощью полной системы Риккати, серая кривая представляет собой траекторию движения захвата манипулятора под действием управляющего воздействия, коэффициент усиления которого рассчитывается на интегральном многообразии, согласно (23)-(25). Как видно из рисунка, траектории движения захвата манипулятора совпадают.

Приведенные результаты показывают, что на практике управление на многообразии может быть использовано взамен полного управления, так как результаты совпадают с достаточной точностью.

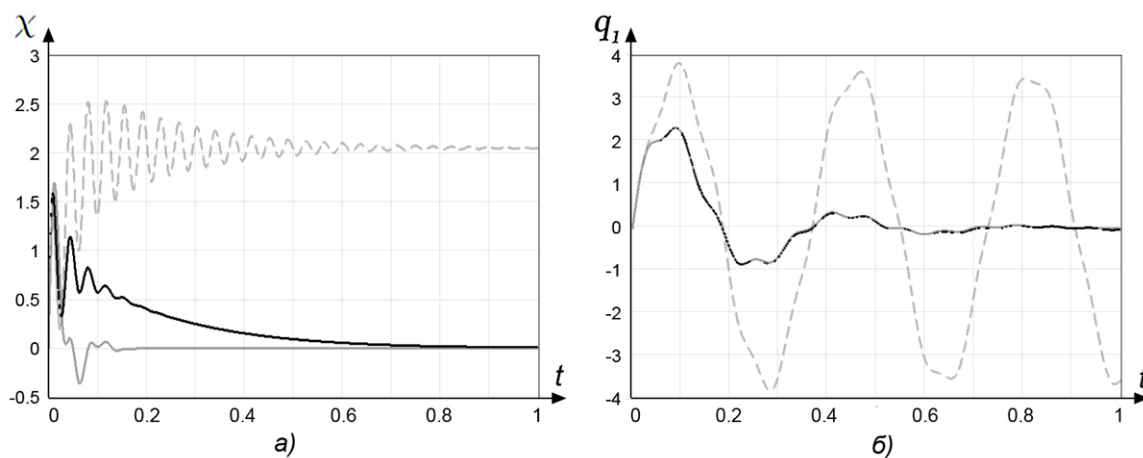


Рис. 1. Численное моделирование движения однозвенного гибкого манипулятора а) и манипулятора с гибким сочленением б): без управляющих воздействий (серый пунктир), под действием полного управления (черным), под действием управления на интегральном многообразии (серый).

5. Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального управления для сингулярно возмущенных систем со слабой диссипацией. Показано, что для системы дифференциальных уравнений Риккати для матрицы усиления линейно-квадратичного регулятора возможно построение притягивающего интегрального многообразия медленных движений. Построение интегрального многообразия возможно при помощи асимптотического разложения по степеням малого параметра. Рассмотрены задачи управления для моделей однозвенного гибкого манипулятора и манипулятора с гибким сочленением. Приведены результаты построения интегрального многообразия для матриц усиления регуляторов для данных систем. Показано, что размерность соответствующих дифференциальных систем Риккати может быть понижена с использованием предлагаемого метода. Приведенные результаты численного моделирования движения систем под действием исходного и редуцированного регуляторов подтверждают эффективность предложенного метода.

Литература

- [1] Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев // Итоги науки и техники. Сер. "Мат. анализ". - М.: ВИНТИ, 1982. - Т. 20 - С. 3-78.
- [2] Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // АиТ. - 2006. - № 1. - С. 3-51.
- [3] Naidu, D. S. Singular perturbations and time scales in aerospace systems: An overview / D. S. Naidu // Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, S. Sivasundaram (Ed.). UK. Gordon and Breach Science Publishers. - 2001. - P. 251-263.
- [4] Naidu, D. S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview / D. S. Naidu // Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. & Algorithms, 2002. - V. 9(2). - P. 233-278.
- [5] O'Malley, R. E. Jr. Singular perturbations and optimal control. / R. E. Jr. O'Malley // Lecture Notes Math, 1978. - V. 680. - P. 171-218.
- [6] Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев // М.: Наука, 1981.

- [7] Черноусько Ф. Л. Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов // М.: Наука, 1980.
- [8] Матюхин В. И., Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики привода / В. И. Матюхин, Е. С. Пятницкий // *АиТ*. - 1989. - № 9. - С. 67-81.
- [9] Фрадков А.Л., Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы / А. Л. Фрадков // М.: Наука, 1990.
- [10] Черноусько Ф. Л. Методы управления нелинейными механическими системами. / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин // М.: Физматлит, 2006.
- [11] Sobolev, V. A. Integral Manifolds and Decomposition of Singularly Perturbed System / V. A. Sobolev // *Syst. Control Lett.* 1984. V. 5. P. 169–179.
- [12] Воропаева Н. В. Декомпозиция линейно-квадратичной задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев // *АиТ*. - 2006. - № 8. - С. 3–11.
- [13] Воропаева Н. В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев // М.: Физматлит, 2009.
- [14] Жарикова Е.Н. Оптимальные периодические системы управления с сингулярными возмущениями / Е. Н. Жарикова, В. А. Соболев // *АиТ*. 1997. - № 7. - С. 151-168.
- [15] Сметанникова Е. Н. Регуляризация периодических задач управления с дешевой платой за управление / Е. Н. Сметанникова, В. А. Соболев // *АиТ*. 2005. - № 6. - С. 59–73.
- [16] Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления / В. А. Соболев // *АиТ*, 1991. - № 2. - С. 53-64.
- [17] Ghorbel, F. Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody systems / F. Ghorbel, M. W. Spong // *Int. J. Non-Linear Mechan.* 2000. - V. 35. - P. 133-155.
- [18] Kokotović, P. V. Singular Perturbations Methods in Control. Analysis and Design. / P. V. Kokotović, H. K. Khalil, J. O'Reily // N. Y.: Academic Press, 1986.
- [19] Singular Perturbations and Hysteresis / edited by Mortell M. P., O'Malley R., Pokrovskii A., Sobolev V. - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [20] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер // М.: Физматлит, 2004, - 560 с.
- [21] Стрыгин В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий. / В. В. Стрыгин, В. А. Соболев // М.: Наука, 1988.
- [22] Bellezza, F. Exact modeling of the flexible slewing link / F. Bellezza, L. Lanari, G. Ulivi // *IEEE Int. Conf. Robot. and Automat.*, 1990. - P. 734–739.
- [23] Spong, M. W. An integral manifold approach to the feedback control of flexible joint robots / M. W. Spong, K. Khorasani, P. V. Kokotovic // *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1987. - V. 3(4). - P. 291-300.