

# Плотность спинового углового момента в остром фокусе оптического вихря с радиальной, азимутальной и седловой поляризацией

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, Д.С. Калинкина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Для оптического вихря с радиальной, азимутальной и седловой поляризацией получены выражения для распределения плотности спинового углового момента (СУМ) и потока мощности в окрестности острого фокуса апланатической системы. Полученные выражения включают радиальную, азимутальную и продольную составляющие СУМ, а также продольную составляющую потока мощности. Для случая узкой кольцевой щели во входной плоскости показано, что в фокальной плоскости имеются области, где отсутствует продольная составляющая СУМ (как у фотонного колеса). Для оптического вихря третьего порядка с седловой поляризацией показан обратный поток энергии вдоль оптической оси.

## 1. Введение

В условиях острой фокусировки существенный вклад даёт поперечный спиновый угловой момент (СУМ), что приводит к такому эффекту, как фотонное колесо [1]. Если же СУМ имеет только продольную компоненту, возникает эффект продольной магнетизации [2]. В работе [3] СУМ измерялся экспериментально, а в [4] изучалось воздействие спина светового поля на микрообъекты. В остром фокусе СУМ исследовался для Гауссовых пучков [5] и для оптических вихрей [6]. В [7] рассматривалась острая фокусировка оптических вихрей с поляризационной сингулярностью, однако исследовался только орбитальный угловой момент, но не спиновый. В данной работе получены выражения для компонент вектора плотности СУМ оптического вихря с радиальной, азимутальной и седловой поляризацией. На примере узкого кольцевого пучка показано наличие в фокальной плоскости областей с полностью продольным СУМ для азимутальной поляризации, полностью поперечным СУМ для седловой поляризации, и приближённо поперечным для радиальной.

## 2. Общие выражения для плотности СУМ в остром фокусе светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью

Если в начальной плоскости имеется линейно поляризованный (вдоль оси  $x$ ) оптический вихрь с комплексной амплитудой  $A(\theta)\exp(in\phi)$ , где  $n$  – топологический заряд вихря,  $A(\theta)$  – функция радиальной аподизации фокусируемого излучения, то вблизи фокуса комплексная амплитуда в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  равна [7, 9]:

$$\begin{aligned}
E_x(r, \varphi, z) &= \frac{i^{n-1}}{2} e^{in\varphi} (2I_{0,n} + e^{2i\varphi} I_{2,n+2} + e^{-2i\varphi} I_{2,n-2}), \\
E_y(r, \varphi, z) &= \frac{i^n}{2} e^{in\varphi} (-e^{2i\varphi} I_{2,n+2} + e^{-2i\varphi} I_{2,n-2}), \\
E_z(r, \varphi, z) &= -i^n e^{in\varphi} (e^{i\varphi} I_{1,n+1} - e^{-i\varphi} I_{1,n-1}),
\end{aligned} \tag{1}$$

где функции  $I_{p,n}$  имеют вид ( $p = 0, 1, 2$ ):

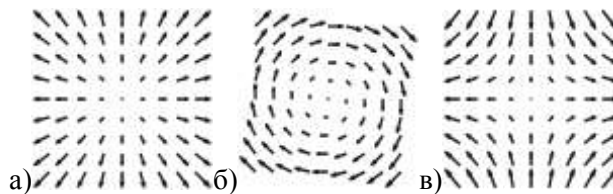
$$I_{p,n} = kf \int_0^\alpha \sin \theta \sqrt{\cos \theta} \sin^p(\theta/2) \cos^{2-p}(\theta/2) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_n(\xi) d\theta, \tag{2}$$

где  $\xi = kr \sin \theta$ ,  $\alpha$  определяет апертуру фокусировки, а  $\theta$  – угол с оптической осью, задающий положение точки на сходящемся сферическом волновом фронте.

Основываясь на (1) и (2), рассмотрим далее световое поле следующего вида:

$$\mathbf{E} = A(\theta) e^{in\varphi} \begin{pmatrix} a_{1x} e^{i\varphi} + a_{2x} e^{-i\varphi} \\ a_{1y} e^{i\varphi} + a_{2y} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где  $n$  – целое число,  $a_{1x}$ ,  $a_{1y}$ ,  $a_{2x}$  и  $a_{2y}$  – комплексные числа. Выражение (3) описывает световые поля с фазовыми и поляризационными сингулярностями. При  $a_{1x} = a_{2x} = 1/2$ ,  $a_{1y} = -i/2$  и  $a_{2y} = i/2$  поле (3) имеет радиальную поляризацию. При  $a_{1x} = i/2$ ,  $a_{2x} = -i/2$ ,  $a_{1y} = a_{2y} = 1/2$  поле (3) имеет азимутальную поляризацию. Если  $a_{1x} = a_{2x} = 1/2$ ,  $a_{1y} = i/2$  и  $a_{2y} = -i/2$ , поле (3) имеет седловую поляризацию. В теории векторных полей такие сингулярности известны как источник/сток, циркуляция и седло [10] (рис. 1).



**Рисунок 1.** Виды векторных сингулярностей: источник/сток (а), циркуляция (б), седло (в).

Плотность СУМ светового поля находится по формуле  $\mathbf{s} = (1/4) \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E})$  [6]. Подставив в эту формулу (3), получим составляющие плотности СУМ в цилиндрических координатах:

$$s_z = \text{Re} \left\{ \left[ R_1 e^{-i\varphi} - R_2 e^{i\varphi} \right]^* \left[ \mathcal{G}_1 e^{-i\varphi} - \mathcal{G}_2 e^{i\varphi} \right] \right\}, \tag{4}$$

$$s_r = -2 \text{Im} \left\{ \left[ \mathcal{G}_1 e^{-i\varphi} - e^{i\varphi} \mathcal{G}_2 \right] \left[ Z_1 e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} Z_2 \right] \right\}, \tag{5}$$

$$s_\varphi = 2 \text{Re} \left\{ \left[ R_1 e^{-i\varphi} - e^{i\varphi} R_2 \right] \left[ Z_1 e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} Z_2 \right] \right\}, \tag{6}$$

где

$$R_p(r, \varphi) = \gamma_{p+}^* e^{-i\varphi} \left( I_{0,n-(-1)^p}^* + I_{2,n-(-1)^p+2}^* \right) + \gamma_{p-}^* e^{i\varphi} \left( I_{0,n-(-1)^p}^* + I_{2,n-(-1)^p-2}^* \right), \tag{7}$$

$$\mathcal{G}_p(r, \varphi) = \gamma_{p+}^* e^{-i\varphi} \left( I_{0,n-(-1)^p}^* - I_{2,n-(-1)^p+2}^* \right) - \gamma_{p-}^* e^{i\varphi} \left( I_{0,n-(-1)^p}^* - I_{2,n-(-1)^p-2}^* \right), \tag{8}$$

$$Z_p(r, \varphi) = \gamma_{p+} e^{i\varphi} I_{1,n-(-1)^p+1} - \gamma_{p-} e^{-i\varphi} I_{1,n-(-1)^p-1}, \tag{9}$$

где  $p = 1, 2$ ,  $\gamma_{p\pm} = (a_{px} \mp ia_{py})/2$ . Далее рассмотрим частные случаи.

### 3. Плотность СУМ в остром фокусе оптического вихря с азимутальной поляризацией

В случае азимутальной поляризации  $\gamma_{1+} = \gamma_{2-} = 0$ ,  $\gamma_{1-} = i/2$ ,  $\gamma_{2+} = -i/2$ . Поэтому

$$s_z = \frac{1}{4} \left( |I_{0,n-1} + I_{2,n-1}|^2 - |I_{0,n+1} + I_{2,n+1}|^2 \right). \quad (10)$$

Например, если фокусируется узкий кольцевой пучок ( $A(\theta) = \delta(\theta - \theta_0)$ ), то

$$s_z = \left( \frac{kf}{2} \right)^2 \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \left[ J_{n-1}^2(kr \sin \theta_0) - J_{n+1}^2(kr \sin \theta_0) \right]. \quad (11)$$

Для поперечных компонент общие выражения громоздки, но из них следует, что обе они равны нулю:  $s_r = s_\varphi = 0$ , то есть в случае азимутальной поляризации вектор плотности СУМ имеет только продольную составляющую. В таком фокусе можно реализовать 100% магнетизацию материала за счет обратного эффекта Фарадея [2].

#### 4. Плотность СУМ в остром фокусе оптического вихря с радиальной поляризацией

Выражение для продольной составляющей СУМ отличается от выражения для азимутальной поляризации только знаком второго слагаемого:

$$s_z = \frac{1}{4} \left( |I_{0,n-1}|^2 - |I_{0,n+1}|^2 + |I_{2,n-1}|^2 - |I_{2,n+1}|^2 \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left( I_{0,n+1}^* I_{2,n+1} - I_{2,n-1}^* I_{0,n-1} \right) \right\}. \quad (12)$$

Для поперечных компонент СУМ общие выражения громоздки, но если принять за фокальную плоскость  $z=0$  и если в начальной плоскости комплексная амплитуда  $A(\theta)$  вещественна, то радиальная составляющая плотности СУМ равна нулю, а азимутальная имеет вид:

$$s_\varphi = \left( I_{0,n-1} - I_{0,n+1} + I_{2,n+1} - I_{2,n-1} \right) I_{1,n}. \quad (13)$$

Это выражение отличается от выражения для продольной составляющей. Однако если фокусируется радиально поляризованный узкий кольцевой пучок, то есть  $A(\theta) = \delta(\theta - \theta_0)$ , то

$$s_\varphi = \frac{(kf)^2}{2} \sin^3 \theta_0 \cos^2 \theta_0 J_n(kr \sin \theta_0) \left[ J_{n-1}(kr \sin \theta_0) - J_{n+1}(kr \sin \theta_0) \right]. \quad (14)$$

#### 5. Плотность СУМ в остром фокусе оптического вихря с седловой поляризацией

В случае седловой поляризации  $\gamma_{1-} = \gamma_{2+} = 0$ ,  $\gamma_{1+} = \gamma_{2-} = 1/2$ . Продольная компонента плотности СУМ при этом равна:

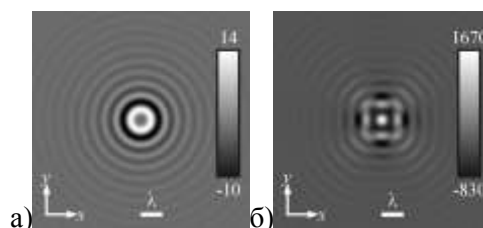
$$s_z = \frac{1}{4} \left( |I_{0,n+1}|^2 - |I_{0,n-1}|^2 - |I_{2,n+3}|^2 + |I_{2,n-3}|^2 \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-4i\varphi} \left( I_{0,n+1}^* I_{2,n-3} - I_{2,n+3}^* I_{0,n-1} \right) \right\}. \quad (15)$$

Из (15) и аналогичных выражений для поперечных компонент следует, что в отличие от радиальной поляризации распределение плотности СУМ не обладает вращательной симметрией.

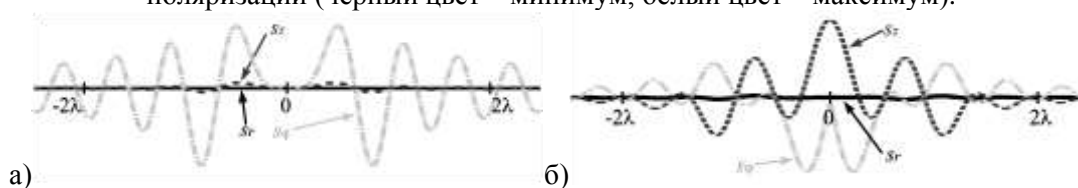
#### 6. Численный расчёт плотности СУМ узкого кольцевого пучка с поляризационными сингулярностями в окрестности острого фокуса

На рис. 2 показаны распределения продольной составляющей плотности СУМ узкого кольцевого пучка в фокусе для радиальной и седловой поляризации, рассчитанные по формуле  $\mathbf{s} = (1/4) \operatorname{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E})$ . При расчёте использовались следующие значения параметров: длина волны  $\lambda = 532$  нм, фокусное расстояние  $f = 100\lambda$ , угол конических волн пучка  $\theta_0 = 85^\circ$ , топологический заряд оптического вихря  $n = 3$ .

На рис. 2 видно, что в случае радиальной поляризации продольная составляющая обладает вращательной симметрией, а в случае седловой – только симметрией относительно декартовых координат. Однако, в случае седловой поляризации, в отличие от радиальной, в фокальной плоскости есть точки, в которых продольная составляющая СУМ равна нулю, а поперечная отлична от нуля (фотонное колесо). Так, на рис. 3 показаны двумерные сечения распределений радиальной, азимутальной и продольной составляющих вектора плотности СУМ для радиальной и седловой поляризации, построенные вдоль оси  $x$ .



**Рисунок 2.** Распределения продольной составляющей вектора плотности СУМ (в условных единицах) узкого кольцевого пучка в фокальной плоскости для радиальной (а) и седловой (б) поляризации (чёрный цвет – минимум, белый цвет – максимум).



**Рисунок 3.** Сечения распределений радиальной (кривые  $s_r$ ), азимутальной (кривые  $s_\phi$ ) и продольной (кривые  $s_z$ ) составляющих вектора плотности СУМ для радиальной (а) и седловой (б) поляризации.

Из рис.3а видно, что в случае радиальной поляризации компоненты  $s_r$  и  $s_\phi$  равны нулю при одних и тех же значениях радиальной координаты  $r$ . Однако фотонное колесо всё же формируется, но не точно, а приближённо, когда продольная компонента СУМ не равна нулю, но азимутальная компонента во много раз её превосходит. На рис. 3б видно, что при седловой поляризации в центре картины вектор плотности СУМ ориентирован продольно, в то время как вокруг центра имеется кольцо, на котором продольная компонента СУМ равна нулю, а азимутальная компонента сравнима с продольной компонентой в центре. На этом кольце и формируется фотонное колесо.

## 7. Заключение

В работе получены выражения для радиальной, азимутальной и продольной компонент вектора плотности СУМ вблизи острого фокуса оптического вихря с поляризационной сингулярностью (с радиальной, азимутальной и седловой поляризацией). Для азимутальной поляризации установлено, что вектор СУМ ориентирован продольно (100% магнетизация [2]). Для радиальной поляризации показано, что вектор СУМ может иметь ненулевую азимутальную составляющую, при этом другая поперечная составляющая, радиальная, равна нулю. Численное моделирование на примере узкого кольцевого пучка показало, что при радиальной поляризации в фокальной плоскости есть области, где азимутальная компонента СУМ на порядок превосходит продольную, но обе они обращаются в нуль одновременно. В случае седловой поляризации есть области, где продольная компонента строго равна нулю, и вектор плотности СУМ ориентирован азимутально.

## 8. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-07-01129 в частях «Общие выражения для плотности СУМ в остром фокусе светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью» и «Численный расчёт плотности СУМ узкого кольцевого пучка с поляризационными сингулярностями в окрестности острого фокуса», и грант 18-07-01380 в частях «Плотность СУМ в остром фокусе оптического вихря с азимутальной поляризацией» и «Плотность СУМ в остром фокусе оптического вихря с радиальной поляризацией», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в части «Плотность СУМ в остром фокусе оптического вихря с седловой поляризацией».

## 9. Литература

- [1] Aiello, A. From transverse angular momentum to photonic wheels / A. Aiello, P. Banzer, M. Neugebauer, G. Leuchs // *Nature Photonics*. – 2015. – Vol. 9. – P. 789-795. DOI: 10.1038/nphoton.2015.203.
- [2] Jiang, Y. Generation of sub-diffraction-limited pure longitudinal magnetization by the inverse Faraday effect by tightly focusing an azimuthally polarized vortex beam / Y. Jiang, X. Li, M. Gu // *Optics Letters*. – 2013. – Vol. 38. – P. 2957-2960. DOI: 10.1364/OL.38.002957.
- [3] Neugebauer, M. Measuring the transverse spin density of light / M. Neugebauer, T. Bauer, A. Aiello, P. Banzer // *Physical Review Letters*. – 2015. – Vol. 114. – P. 063901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.063901.
- [4] Bekshaev, A.Ya. Subwavelength particles in an inhomogeneous light field: optical forces associated with the spin and orbital energy flows // *Journal of Optics*. – 2013. – Vol. 15(4). – P. 044004. DOI: 10.1088/2040-8978/15/4/044004.
- [5] Nieminen, T.A. Angular momentum of a strongly focused Gaussian beam / T.A. Nieminen, A.B. Stilgoe, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2008. – Vol. 10(11). – P. 115005. DOI: 10.1088/1464-4258/10/11/115005.
- [6] Cui, Z. Dynamical characteristics of tightly focused vortex beams with different states of polarization / Z. Cui, J. Sun, N.M. Litchinitser, Y. Han // *Journal of Optics*. – 2019. – Vol. 21(1). – P. 015401. DOI: 10.1088/2040-8986/aaed91.
- [7] Котляр, В.В. Острая фокусировка светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью произвольного порядка / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.А. Ковалёв // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 337-346. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346.
- [8] Richards, B. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic systems / B. Richards, E. Wolf // *Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A*. – 1959. – Vol. 253. – P. 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
- [9] Chen, B. Tight focusing of elliptically polarized vortex beams / B. Chen, J. Pu // *Applied Optics*. – 2009. – Vol. 48. – P. 1288-1294. DOI: 10.1364/AO.48.001288.
- [10] Dennis, M.R. Topological Singularities in Wave Fields // PhD thesis, Bristol, 2001.

# Spin angular momentum density in the tight focus of an optical vortex with radial, azimuthal, and saddle polarization

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, D.S. Kalinkina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

<sup>2</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** For an optical vortex with radial, azimuthal, and saddle polarization, expressions are obtained, which describe distribution of the spin angular momentum (SAM) density and power flow in the sharp focus area of an aplanatic system. These expressions include the radial, azimuthal, and longitudinal SAM components and the longitudinal component of the power flow. For a special case of a narrow annular slit in the input plane, it is shown that there are areas in the focal plane where there is no longitudinal SAM component (photon wheel) or it is an order of magnitude smaller than the transverse component. For a third-order optical vortex with saddle polarization, the reverse energy flux along the optical axis is revealed.