ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИИ ГЕГЕНБАУЭРА ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ НАБЛЮДЕНИЯ

Д.В. Иванов
Самарский государственный университет путей сообщения

Разработан критерий для оценивания параметров авторегрессии Гегенбауэра. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок. Численный эксперимент показал работоспособность алгоритма, а также более высокую точность по сравнению с методом наименьших квадратов (МНК).

В последние годы для анализа временных рядов все большее распространение получают процессы длинной памяти. Длинная память, или долгосрочная зависимость – это свойство, которое описывает корреляционную структуру высокого порядка временного ряда. В случае, если ряд характеризуется длинной памятью, то зависимость существует даже между далеко отдаленными друг от друга во времени наблюдениями [1].

Типичными представителями таких моделей, являются FARMA (Fractional differencing Auto-regressive Moving-average) процессы. В основе этих моделей лежит понятие разности дробного порядка. В [2,3] рассмотрена идентификация авторегрессии с разностями дробного порядка при наличии помех наблюдения.

Одно из обобщений разности дробного порядка может быть сделано на основе многочленов Гегенбауэра. Данные авторегрессии находят применение в экономических и других задачах. Однако методы оценивания параметров при наличии помехи наблюдения на сегодняшний день отсутствуют.

Постановка задачи. Временной ряд, описывается линейными стохастическими уравнениями:

$$\left(1-2\beta B+B^2\right)^{\alpha}\left(z_i-\sum_{m=1}^{r}b_0^{(m)}z_{i-m}\right)=\zeta_i,\quad y_i=z_i+\xi_i, \tag{1}$$

где $0<\alpha,\ 0<\beta\le 1$ оператор сдвига назад $Bz_i=z_{i-1}$.

Тогда оператор $\left(1-2\beta B+B^2\right)^{\alpha}$ можно представить в виде

$$\left(1-2\beta B+B^2\right)^{\alpha}z_i=\sum_{j=0}^{i}C_j^{\alpha}(\beta)z_{i-j},$$

$$C_j^{\alpha}(\beta)=\sum_{k=0}^{[j/2]}(-1)^k\,\Gamma(\alpha+j-k)\frac{(2\beta)^{j-2k}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)\Gamma(j-2k+1)},\ \Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt.$$

Для практической реализации целесообразно использовать рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} C_0^{\alpha}(\beta)=1,\\ C_1^{\alpha}(\beta)=2\alpha\beta,\\ C_j^{\alpha}(\beta)=2\beta\left(\dfrac{\alpha-1}{j}+1\right)C_{j-1}^{\alpha}(\beta)-\left(2\dfrac{\alpha-1}{j}+1\right)C_{j-2}^{\alpha}(\beta).\end{cases}$$

Пусть выполнены условия:

1. Динамическая система устойчивая. Истинные параметры системы принадлежат компактному множеству $\tilde{\mathrm{B}}$.

2. Помехи $\{\xi_i\},\{\zeta_i\}$ статистически независимые последовательности. $\{\xi_i\},\{\zeta_i\}$- стационарные в совокупности в узком смысле последовательности независимых случайных векторов с $E\{\xi_i\}=0,\quad E\{\zeta_i\}=0,\ E\{\xi_i^2\}=\sigma_\xi^2>0,\ E\{\zeta_i^2\}=\sigma_\zeta^2>0$ и для

некоторых постоянных π_ξ и $\pi_\zeta : \left|\xi_i\right| < \pi_\xi$ и $\left|\zeta_i\right| < \pi_\zeta$ п.н., где E - оператор математического ожидания.

3. $\{\zeta_i\}$ статистически не зависит от $\{\xi_i\}$.

4. Для помехи $\{\xi_i\}$ выполнено условие

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}\varphi_\xi^{(i)}\left(\varphi_\xi^{(i)}\right)^T\right] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}E\left(\varphi_\xi^{(i)}\left(\varphi_\xi^{(i)}\right)^T\right)\right] = \sigma_\xi^2\begin{pmatrix} h_\alpha(0) & \dots & h_\alpha(r-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\alpha(r-1) & \dots & h_\alpha(0)) \end{pmatrix} = \sigma_\xi^2 H_\alpha,$$

где $\varphi_\xi^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)\xi_{i-j-1},\dots,\sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)\xi_{i-j-r}\right)^T$, причем H_ξ, положительно определена.

5. Выходной сигнал z_i является случайным и удовлетворяет условию

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\varphi_z^{(i)}\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T = H \text{ п.н.},$$

$\varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)z_{i-j-1},\dots,\sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)z_{i-j-r}\right)^T$, причем H существует, ограничена и положительно определена.

6. Априорно известно соотношение $\gamma = \sigma_\zeta^2 / \sigma_\xi^2$.

Необходимо оценить неизвестные коэффициенты уравнения (1) по наблюдениям y_i при известных порядках r, α, β.

Критерий для оценивания параметров. Представим уравнение (1) в виде линейной регрессии

$$\left(1-2\beta B+B^2\right)^\alpha z_i = \left(1-2\beta B+B^2\right)^\alpha\left(\sum_{m=1}^{r}b_0^{(m)}z_{i-m}\right)+\zeta_i,\quad y_i = z_i+\xi_i,$$

$$\left(1-2\beta B+B^2\right)^\alpha y_i = \varphi_i^T b_0+\varepsilon_i, \tag{2}$$

где $\varphi^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)y_{i-j-1},\dots,\sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)y_{i-j-r}\right)^T$, $b_0 = \left(b_0^{(1)},\dots,b_0^{(r)}\right)^T$,

$$\varepsilon_i = \zeta_i + \sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)\xi_i - b_0^T\varphi_\xi^{(i)},$$

$$\varphi_\xi^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)\xi_{i-j-1},\dots,\sum_{j=0}^{i}(C_j^\alpha(\beta)\xi_{i-j-r}\right)^T.$$

Лемма 1. Пусть выполнены предположения 1-3, тогда $E(\varepsilon_i)=0$.

Доказательство. Из предположения 2 следует, что $E(\xi_i)=0$, тогда используя предположение 3 можно показать

$$E(\varepsilon_i) = E\left(\zeta_i + \sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)\xi_{i-j} - b_0^T\varphi_\xi^{(i)}\right) = E(\zeta_i) + \sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)E\left(\xi_{i-j}\right) -$$

$$-\sum_{m=1}^{r}b_0^{(m)}\sum_{j=0}^{i}C_j^\alpha(\beta)E\left(\xi_{i-j-m}\right) = 0.$$

Лемма 2. Пусть выполнены предположения 2-6, тогда дисперсия обобщенной ошибки равна

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\xi^2\left(h_{\alpha\beta}(0) + \gamma + b_0^T H_{\alpha\beta} b_0 - 2\tilde{h}_{\alpha\beta} b_0\right) = \sigma_\xi^2 \omega(b_0),$$

где $H_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c|c} h_{\alpha\beta}(0) & \dots & h_{\alpha\beta}(r-1) \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline h_{\alpha\beta}(r-1) & \dots & h_{\alpha\beta}(0)) \end{array}\right)$,

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} = \left(h_{\alpha\beta}(1), \dots, h_{\alpha\beta}(r)\right),\ h_{\alpha\beta}(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} C_{j+m}^{\alpha}(\beta) C_j^{\alpha}(\beta) \frac{N-j}{N},\ m = 0, r.$$

Доказательство. По определению дисперсии

$$\sigma_\varepsilon^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)\right)^2,$$

так как $E(\varepsilon_i) = 0$, то

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left(\varepsilon_i^2\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left(\zeta_i + \sum_{j=0}^{i} C_j^{\alpha}(\beta)\left(\xi_{i-j}\right) - b_0^T \varphi_\xi^{(i)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\zeta_i^2 + \left(\sum_{j=0}^{i} C_j^{\alpha}(\beta)\left(\xi_{i-j}\right)\right)^2 + b_0^T \varphi_\xi^{(i)} \left(\varphi_\xi^{(i)}\right)^T b_0 - 2\zeta_i b_0^T \varphi_\xi^{(i)}\right.$$

$$\left. - 2\sum_{j=0}^{i} C_j^{\alpha}(\beta)\left(\xi_{i-j}\right)\left(\varphi_\xi^{(i)}\right)^T b_0 + 2\zeta_i \sum_{j=0}^{i} C_j^{\alpha}(\beta)\left(\xi_{i-j}\right)\right).$$

Применяя лемму 1 [4] для ξ_i и ζ_i предположения 3-5 получим

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\zeta_i^2 + \left(\sum_{j=0}^{i} C_j^{\alpha}(\beta)\left(\xi_{i-j}\right)\right)^2 + b_0^T \varphi_\xi^{(i)} \left(\varphi_\xi^{(i)}\right)^T b_0\right) =$$

$$= \sigma_\xi^2\left(h_{\alpha\beta}(0) + \gamma + b_0^T H_{\alpha\beta} b_0 - 2\tilde{h}_{\alpha\beta} b_0\right).$$

Будем искать оценки $\hat{b}(N)$ коэффициентов b из условия минимума следующего критерия:

$$\min_{\theta\in\tilde{B}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\Delta^{\alpha} y_i - \varphi_i^T \theta\right)^2}{h_{\alpha\beta}(0) + \gamma + b^T H_{\alpha\beta} b - 2\tilde{h}_{\alpha\beta} b}. \tag{3}$$

Теорема. Пусть некоторый случайный процесс $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$ *описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-6. Тогда оценка* $\hat{b}(N)$, *определяемая выражением (3) с вероятностью 1 при* $N \to \infty$, *существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т.е.*

$$\hat{b}(N) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{\text{П.Н.}} b_0.$$

Численный пример. Временной ряд описывается уравнениями:

$$\left(1 - 1.4B + B^2\right)^{0.4}\left(z_i - 0.5z_{i-1} - 0.2z_{i-1}\right) = \zeta_i, \quad y_i = z_i + \xi_i. \tag{4}$$

Вид автокорреляционной функции представлен на рисунке:

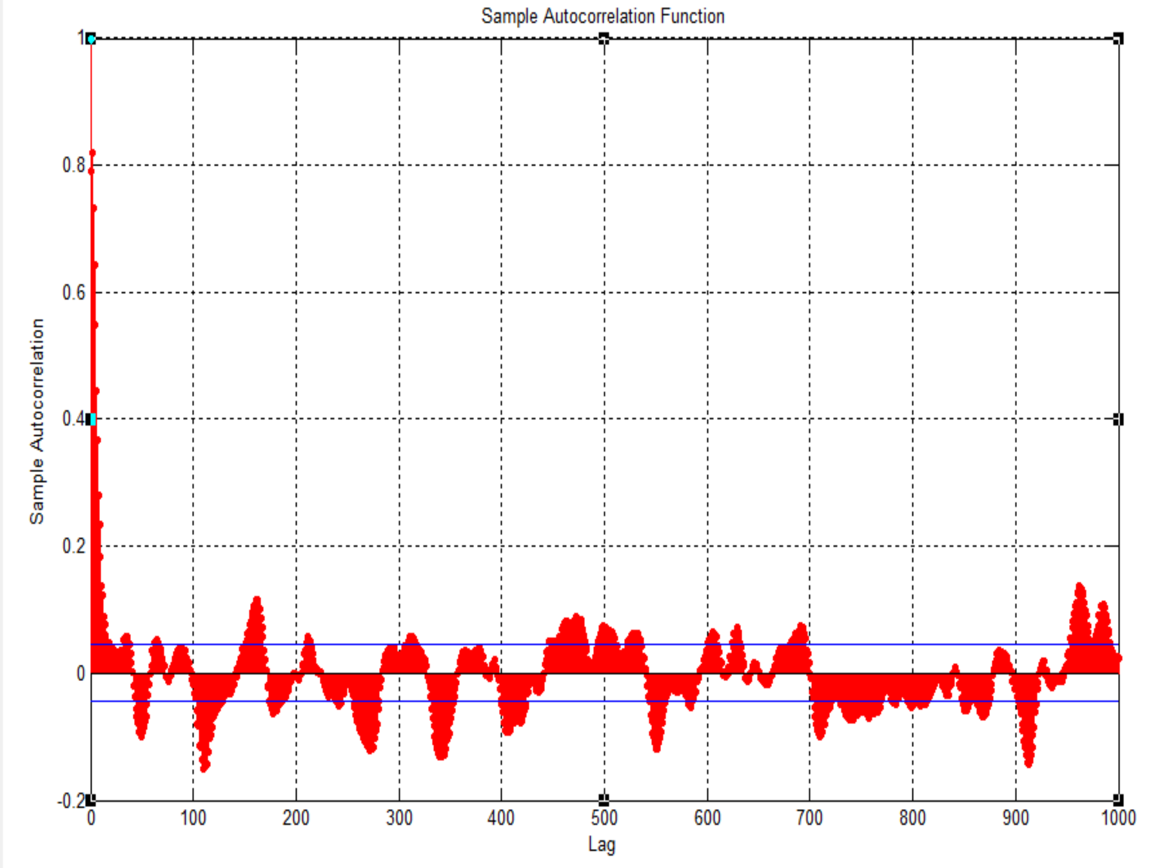

Рисунок 1 – Автокорреляционная функция уравнения (4)

Количество наблюдений $N = 2000$.

Результаты сравнивались по следующим характеристикам: относительной погрешности оценивания параметров:

$$\delta\theta = \left\|\hat{\theta} - \theta_0\right\| / \left\|\theta_0\right\| \cdot 100\%,$$

относительной погрешности моделирования:

$$\delta z = \left\|\hat{z} - z\right\| / \left\|z\right\| \cdot 100\%,$$

где $z = \left|z_i, \ldots, z_N\right|^T$ – вектор выходной ненаблюдаемой переменной, $\hat{z} = \left|\hat{z}_i, \ldots, \hat{z}_N\right|^T$ – оценка вектора выходной ненаблюдаемой переменной, полученная с помощью модели.

В таблице приведены значения относительных погрешностей, для отношений “шум-сигнал”, указанных в таблице.

Таблица 1. Относительные погрешности оценивания параметров и моделирования

σ_ξ / σ_z	$\delta\theta$		δz	
	Критерий (3), %	МНК, %	Критерий (3),%	МНК, %
0.05	1.20	5.77	2.56	1.54
0.1	8.05	15.21	2.81	13.49
0.15	23.63	29.50	6.16	24.23

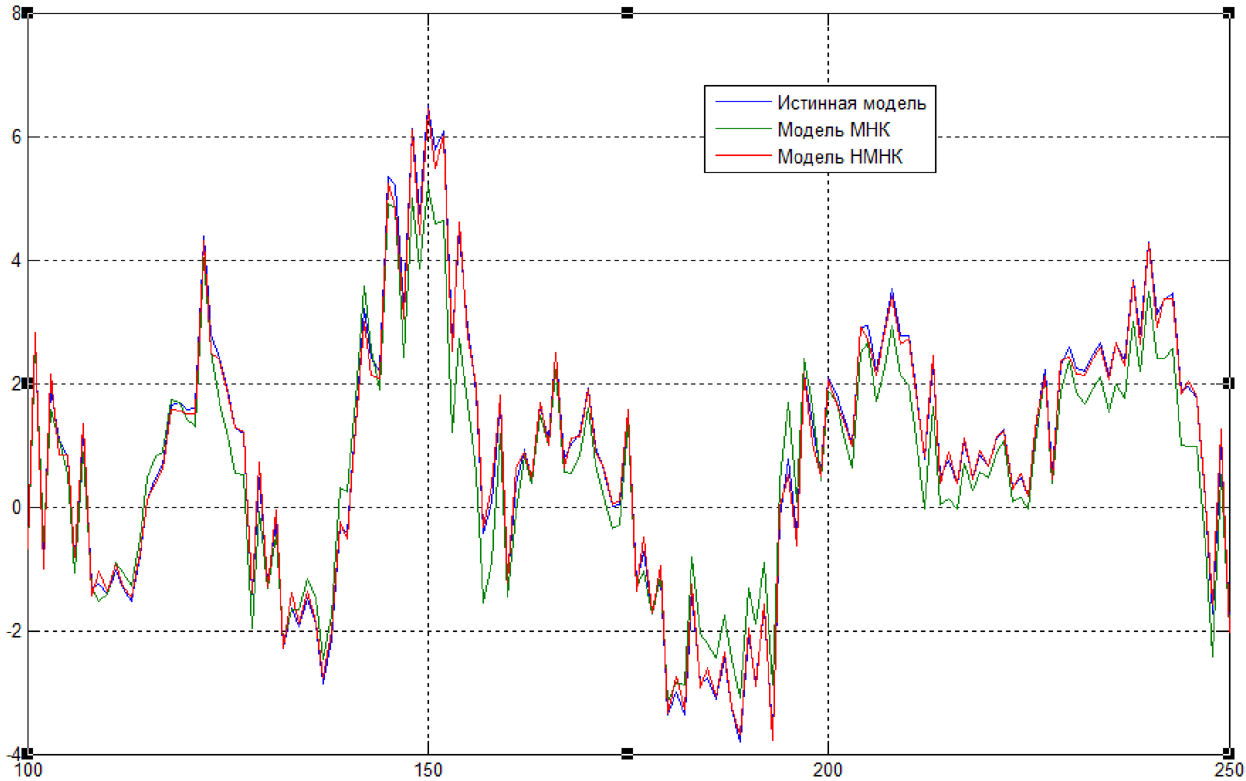

Рисунок 2. Выходной сигнал, рассчитанный по истинным и оцененным параметрам при $\sigma_\xi / \sigma_z = 0.15$

Литература

1.Кветный Р.Н., Мельник Л.Н., Коцюбинский В.Ю. Принятие решений на основе прогнозирования временных рядов с двойной длинной памятью. Palmarium Academic Publising, 2013, 140с.

2.Иванов Д.В. Идентификация авторегрессии нецелого порядка с помехой в выходном сигнале// Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы научно-практической internet-конференции. 18-19 июня 2013 г./ отв. ред. Ю.С. Нагорнов. Ульяновск: SIMJET, 2013. С. 64-67.

3.Иванов Д.В., Синицина Е.И. Численный алгоритм оценивания параметров авторегрессии, описываемой уравнениями с разностями дробного порядка с помехой наблюдения //Наука и образование транспорту: материалы VII Международной научно-практической конференции. Международная научно-практическая конференция “Наука и образование транспорту”, 2014 г. – Самара: СамГУПС, 2014. с. 207-209.

4. Кацюба О.А., Жданов А.И. Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления // Автоматика и телемеханика.– 1979. - № 8. - С.86-90.