ОБ ОДНОМ СЦЕНАРИИ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

М.И. Карпухина

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет), Самара, Россия

В работе рассматривается сценарий смены устойчивости в обыкновенном дифференциальном уравнении, при котором происходит переход от пары комплексно-сопряженных чисел с отрицательной вещественной частью к паре вещественных характеристических чисел разного знака (с кратным нулевым корнем при бифуркационном значении параметра).

Ключевые слова: бифуркация, смена устойчивости.

При исследовании сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой интерес вызывают ситуации, в которых наблюдается затягивание потери устойчивости. Суть этого явления заключается том, что после того, как положение равновесия быстрой подсистемы теряет устойчивость, уход фазовой точки от него происходит не сразу, а спустя некоторое время. Существует два основных сценария затягивания потери устойчивости, отвечающих критическим в смысле Ляпунова ситуациям [1, 2].

Один из них соответствует изменению знака вещественного характеристического числа линеаризованной матрицы быстрой системы; в этом случае дифференциальная система имеет траекторию-утку [3]. Другой соответствует смене знака вещественной части пары комплексных характеристических корней. Эта ситуация в общем случае рассмотрена в работах А.И. Нейштадта [4].

Существует еще один сценарий смены устойчивости, при котором происходит одновременное обнуление не только вещественных частей, но и коэффициентов мнимых частей пары комплексно-сопряженных собственных чисел, сопровождаемое появлением кратного нулевого корня, с последующим рождением пары вещественных собственных значений разных знаков. В качестве модели такого сценария смены устойчивости можно рассмотреть однопараметрическое дифференциальное уравнение вида

$$y'' + \alpha y' + \alpha y = 0$$

или соответствующую ему систему

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -\alpha y - \alpha z \end{cases} \qquad (1)$$

Эта система имеет единственное положение равновесия (0,0) при любых значениях параметра α, кроме $\alpha = 0$, когда каждая точка оси OY является особой. Исследуем его устойчивость и изменения фазового портрета системы при различных значениях $\alpha \in R$.

Собственные числа матрицы системы имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}, \lambda_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}, \qquad (2)$$

причем очевидно, что в зависимости от знака подкоренного выражения они могут быть как вещественными, так и комплексными, и система (1) имеет две точки бифуркации при $\alpha = 0$ и $\alpha = 4$. Проанализируем состояние системы при изменении параметра.

$\underline{\alpha < 0}$. Состояние равновесия (0,0) представляет собой седло ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$), причем его асимптоты содержат вектора

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha}} \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

и бесконечно приближаются к оси OX при $\alpha \to -0$.

$\underline{\alpha = 0}$. Каждая точка оси OY является точкой неустойчивого равновесия, и фазовый портрет представляет собой прямые, параллельные оси OX.

$\underline{\alpha \in (0,4)}$. Собственные числа

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{4\alpha - \alpha^2}}{2} \qquad (2')$$

имеют отрицательную вещественную часть, и состояние равновесия (0,0) является устойчивым фокусом.

$\underline{\alpha = 4}$. Собственные числа совпадают ($\lambda_1 = \lambda_2 = -2$), и положение равновесия представляет собой вырожденный узел.

$\underline{\alpha > 4}$. Собственные числа (2) вновь вещественные, но теперь имеют один знак ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и положение равновесия является устойчивым узлом, причем все траектории касаются прямой, содержащей вектор

$$P_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha}} \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Особое внимание следует обратить на изменение состояния системы в окрестности значения $\alpha = 0$, поскольку, в отличие от описанных выше видов смены устойчивости, переход от пары вещественных характеристических чисел разного знака к паре комплексно-сопряженных чисел с отрицательной вещественной частью ранее не изучался.

Интерес представляет обобщение этой ситуации, возникающее при замене параметра на знакопеременную функцию независимого переменного, а также исследование поведения сингулярно возмущенных систем, в быстрых подсистемах которых наблюдается подобная схема смены устойчивости.

Литература

1. Арнольд, В.И. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко., Л.П. Шильников. – М.: ВИНИТИ, 1986. –218 с.
2. Щепакина, Е.А. Два вида смены устойчивости интегральных многообразий // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 713–716.
3. Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. – М.: Физматлит, 2010. – 319 с.
4. Нейштадт, А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 2060–2067; Т. 24, № 2. – С. 226–233.
5. Щепакина, Е.А. Интегральные многообразия со сменой устойчивости: учеб. Пособие / Е.А. Щепакина, Е.В. Щетинина; под редакцией В.А. Соболева. – Самара: Универс групп, 2009. – 228 с.