

## Об оценке длин очередей в СМО с произвольной корреляцией

И.А. Блатов<sup>1</sup>, Б.Я. Лихтциндер<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Льва Толстого 23, Самара, Россия, 443010

**Аннотация.** Классическая теория массового обслуживания изучает обработку временных рядов в предположении независимости выборки. Однако трафик современных мультисервисных сетей обычно сильно коррелирован и методы классической теории не работают. В настоящей работе приводятся результаты имитационного моделирования и сравнительный анализ пуассоновского потока заявок и потока заявок в случае мультисервисных сетей связи. Рассматриваются обобщения формулы Хинчина-Поллячека для средней длины очереди на стационарных потоках заявок с произвольной корреляцией и возможности их применения. Показано, что при отсутствии корреляционных связей между поступающими заявками, средний размер очереди определяется дисперсией чисел заявок, поступающих в течение интервалов обработки одной заявки, а при пуассоновском потоке обобщенная формула приводится к формуле Хинчина-Поллячека, в ее обычном виде. Показано, что даже для самоподобных процессов, имеющих бесконечно большой интервал корреляции, корреляционные зависимости между отдельными значениями очередей распространяются лишь в пределах интервалов занятости системы массового обслуживания. Для потоков заявок общего вида установлены зависимости среднего значения очереди от размера периода занятости и показано, что именно пачечные свойства потоков оказывают определяющее влияние на размеры очередей.

### 1. Введение

Средняя длина очереди является важной характеристикой системы массового обслуживания (СМО). В случае пуассоновского потока заявок ее значение может быть найдено по формуле Хинчина-Поллячека [1]. В мультисервисных сетях связи (МСС) с пакетной коммутацией поток пакетов существенно отличается от пуассоновского – поскольку эти потоки формируются множеством источников запросов на предоставление услуг, существенно отличающихся между собой, и является сильно коррелированным [2]-[3]. Имеется значительное число публикаций, в которых показаны фрактальные свойства трафика МСС [2],[6], [7] др. Однако, корреляционные свойства трафика непосредственно не увязываются с размерами очередей.

В связи с этим актуальной становится задача получения легко реализуемых на основе статистического анализа данных формул оценки длины очереди для произвольных коррелированных потоков заявок. Данная задача решается в настоящей статье. В разделе 1 приводятся результаты имитационного моделирования, иллюстрирующие существенные различия в поведении очередей для потока независимых заявок и заявок в случае потока видеотрафика. В разделе 2 производится постановка задачи, на основе уравнения баланса. В

разделе 3 выводятся соответствующие формулы для длины очереди и приводятся основные результаты.

## 2. Имитационное моделирование и сравнительный анализ

Любой пакетный трафик является продуктом компьютерной обработки, выполняемой процессором при решении задач приложений. Решение любой задачи состоит из трех последовательных этапов: получение исходных данных, процесс обработки и процесс выдачи результатов, причем, трафик образуется именно на третьем этапе. Это и обуславливает его пачечный характер.

Все это приводит к тому, что для МСС - потоков характерна неравномерность поступления заявок и пакетов. Пакеты группируются в «пачки» в одних промежутках времени и практически отсутствуют – в других промежутках.

Рассмотрим особенности функции распределения вероятностей числа заявок на интервале для МСС-потока.

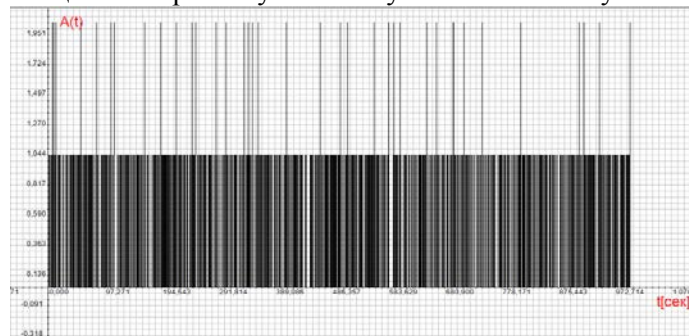
1. В большинстве случаев, для характеристики числа заявок, поступающих за некоторый интервал времени, используется нормальный закон распределения.

Однако исследования показали, что для МСС - трафика аппроксимация нормальным законом распределения не согласуется с действительностью. Реальные распределения обладают существенной асимметрией, в то время как нормальный закон предполагает симметричное распределение.

2. МСС-поток заявок обладает существенной неравномерностью. Даже в течение небольших промежутков времени наблюдаются периоды высокой активности, периоды пониженной активности и периоды полного отсутствия заявок.

3. Большая «пачечность» потока приводит к появлению значительного числа интервалов, в течение которых заявки вообще не поступают. Именно эта весьма высокая вероятность «нулевого состояния» приводит к отличию реального закона распределения от «нормального».

В качестве исследуемой модели нами будет рассматриваться стационарный ординарный поток заявок, поступающих на обработку в систему массового обслуживания (СМО).

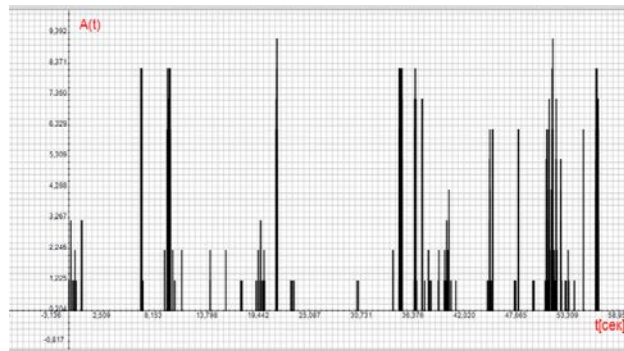


**Рисунок 1.** Числа заявок для пуассоновского потока с параметром  $\lambda = 1$  на интервалах  $\tau$ , соответствующие значению коэффициента загрузки  $\rho = 0,1$ .

На рисунке 1 показаны результаты имитационного моделирования. При значениях коэффициента загрузки  $\rho = 0,1$  в интервал  $\tau$  поступает не более двух заявок.

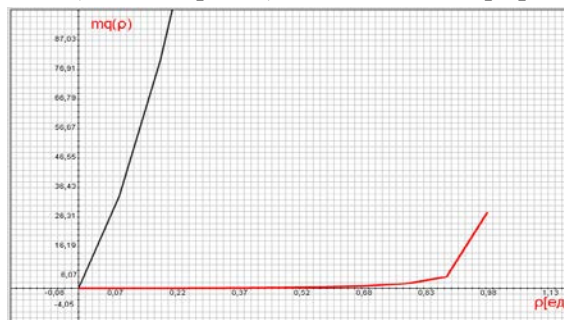
В связи с тем, что МСС-поток заявок обладает существенной неравномерностью, в нем наблюдаются периоды с различной активностью. Указанные периоды чередуются между собой во времени с различными вероятностями появления, Отсутствию заявок соответствует период нулевой активности.

На рисунке 2 показаны числа пакетов от видео трафика на интервалах  $\tau$ , соответствующих значению коэффициента загрузки  $\rho = 0,1$  при  $\lambda = 69$  пакетов/сек. В отличие от пуассоновского, ввиду пачечного характера трафика, даже при малых значениях загрузки, он образует на интервалах  $\tau$  пачки, содержащие до 10 пакетов.



**Рисунок 2.** Числа пакетов от видео трафика на интервалах  $\tau$ , соответствующие значению коэффициента загрузки  $\rho = 0,1$ .

На рисунке 3 показаны зависимости среднего значения очередей от коэффициента загрузки  $\rho$  для пуассоновского потока (нижняя кривая) и потока видеотрафика (верхняя кривая).



**Рисунок 3.** Средние значения очередей в зависимости от коэффициента загрузки  $\rho$ .

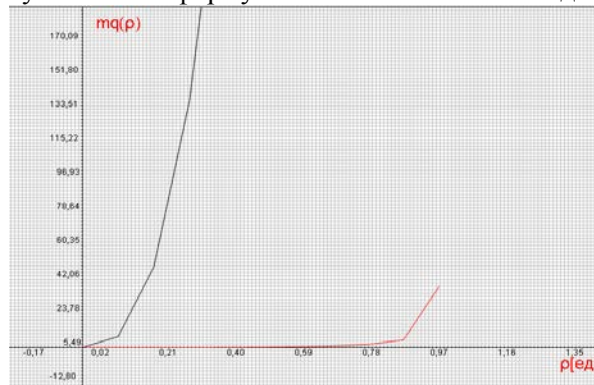
Разница впечатляет! При коэффициенте загрузки  $\rho = 0,1$  средняя длина очереди для пуассоновского трафика составляет 0,25 пакета, в то время, как для видеотрафика она превышает 200 пакетов. Следовательно, известная формула Хинчина-Поллячека (1), справедливая для очередей с пуассоновскими потоками, с постоянным временем обслуживания, совершенно неприменима для потока видеотрафика.

$$\overline{q(\tau)} = \frac{\lambda^2 \tau^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \tag{1}$$

Принято считать, что, при постоянном времени обслуживания, характер очередей в СМО полностью определяется распределением вероятностей интервалов времени  $\tau_i$  между соседними заявками. И, если закон распределения является экспоненциальным, а, следовательно, распределение вероятностей чисел заявок на интервале времени  $\tau$  подчиняется закону Пуассона, то, как это следует из (1), коэффициент загрузки  $\rho$  однозначно характеризует размер очереди. При этом подразумевается, что интервалы времени  $\tau_i$  взаимно независимы, и между ними отсутствует корреляция. Если же указанные интервалы взаимно коррелированы, то, даже при их экспоненциальном распределении, применение формулы Хинчина-Поллячека становится невозможным.

В качестве примера рассмотрим реализацию простейшего стационарного потока заявок, с экспоненциальным распределением интервалов времени между соседними заявками, на длительном промежутке времени  $T$ . Переставим местами полученные значения интервалов, с начала промежутка времени  $T$ , по мере их возрастания. Полученный таким образом поток так же, как и исходный поток, имеет экспоненциальное распределение интервалов времени между

соседними заявками. Однако, средний размер очереди для такого потока будет во много раз превышать значения, полученные по формуле Хинчина-Поллячека для исходного потока.



**Рисунок 4.** Зависимости средних размеров очередей для пуассоновского потока (нижний график) и того же потока, с ранжированными интервалами между заявками (верхний график).

На рисунке 4 представлены зависимости средних размеров очередей от коэффициента загрузки для пуассоновского потока (нижний график) и того же потока, с ранжированными интервалами между заявками (верхний график).

Нижняя кривая соответствующая пуассоновскому потоку, на широком участке почти сливается с осью координат. Верхняя кривая, соответствующая потоку с ранжированными интервалами между заявками, показывает весьма существенное возрастание значений очереди, даже при малых коэффициентах загрузки.

Этим примером мы хотим еще раз показать, что, при заданном времени обслуживания, знание закона распределения вероятностей, далеко не полностью определяет размер очередей, получающихся при обработке заявок в СМО. Большое, (а часто определяющее) влияние на размеры очередей оказывают корреляционные свойства потоков

### 3. Постановка задачи

Введем терминологию и обозначения. Анализируются стационарные потоки заявок (пакетов). Весь промежуток времени анализа разбивается на равные интервалы  $\tau$ . Считается, что интервал времени обработки каждой из заявок - постоянный и равен  $\tau$ . Числа заявок на  $i$ -м интервале обозначаем через  $m_i(\tau)$ . Учитывая, что коэффициент загрузки  $\rho = \lambda \tau$ , где  $\lambda$  - постоянная интенсивность заявок, считаем, что  $m_i(\tau) = m_i(\rho)$ . Величины  $\overline{m(\tau)} = \lambda \tau = \rho$  и

$D_m(\tau) = [m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}]^2$  - математическое ожидание и дисперсия чисел заявок, поступающих в течение интервала времени  $\tau$ , соответственно. Через  $q_i(\tau)$  обозначим количество заявок, стоящих в очереди на  $i$ -м интервале обработки (длину очереди). Через  $\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = K[q_{i-1}(\tau), m_i(\tau)]$  обозначим ковариацию случайных величин  $q_{i-1}(\tau)$  и  $m_i(\tau)$ . Все рассматриваемые в статье предельные переходы рассматриваются в смысле сходимости по вероятности.

Для любой одноприборной СМО справедливо рекуррентное соотношение, устанавливающее связь между поступающими и обработанными заявками [1, гл. 1]:

$$q_i(\tau) = q_{i-1}(\tau) + m_i(\tau) - \delta_i(\tau), \tag{2}$$

$$\delta_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{i-1}(\tau) = m_i(\tau) = 0; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае пуассоновского потока заявок с постоянным временем обслуживания, для средней длины очереди (математического ожидания) известна формула Хинчина - Поллячека [1, гл. 1]:

В [ 3, 4 ] было получено обобщение формулы (2) на случай произвольных коррелированных потоков:

$$\overline{q(\tau)} = \frac{D_m(\tau) + 2\mu_{q_i-m_i}(\tau)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}. \tag{3}$$

Для потоков с взаимно независимыми заявками корреляция отсутствует, и

$$\overline{q(\tau)} = \frac{D_m(\tau)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}.$$

Для пуассоновского потока  $D_m(\tau) = \overline{m(\tau)} = \rho$ , и мы приходим к формуле (1).

Формула (3) свидетельствует о существенном влиянии корреляционных свойств потоков на средние значения очередей. Однако, как будет показано ниже, на размеры очередей особое влияние оказывают только те корреляционные связи, которые приводят к группированию заявок в пачки.

#### 4. Вывод формул и основные результаты

Преобразуем формулу (3) к более удобному для применения виду.

Введем понятие цикла обслуживания. Циклом обслуживания  $Z_k = \bigcup_{j=j_k}^{j_{k+1}} I_j$  будем называть

совокупность смежных интервалов обработки, на которых  $q_j > 0$  везде, кроме последнего интервала, на котором очередь обнуляется после обработки последней заявки, а слева от данного цикла тоже находится хотя бы один такой интервал.

**Замечание 1.** Понятие цикла обслуживания отличается от введенного Л. Клейнроком [1] понятия периода занятости, поскольку, период занятости предполагает наличие слева и справа, как минимум, одного интервала, на котором  $m_i(\tau) = q_i(\tau) = 0$ . Целесообразность введения данного понятия связана с тем, что, как будет показано ниже, в формуле (10) для  $\mu_{q_i-m_i}(\tau)$  сохраняются корреляционные связи только внутри циклов обслуживания, которые могут быть существенно короче периодов занятости Клейнрока.

Сделаем следующие предположения.

**Гипотеза эргодичности и взаимной стационарности.** Предположим, что все рассматриваемые процессы обладают свойствами эргодичности, стационарности и взаимной стационарности в широком смысле. В частности, при  $j > i$

$$\mu_{q_i, m_j}(\tau) = \mu_{qm}(i-j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N q_{i-k+1}(\tau) [m_{j-k+1}(\tau) - \overline{m(\tau)}]. \tag{4}$$

**Гипотеза о затухании взаимной корреляции.** Предположим, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{q_{i-N-1}, m_i}(\tau) \rightarrow 0. \tag{5}$$

Основным результатом настоящей статьи является следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть для стационарного потока заявок  $m_i(\tau)$  с конечным математическим ожиданием  $\overline{m(\tau)}$  и дисперсией  $D_m(\tau)$  выполнены предположения (4) и (5). Тогда справедливы формулы

$$\overline{q(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1}-j_s} (j_{s+1} - j_s + 1 - j)(m_{j_s+j} - 1), \tag{6}$$

$$\overline{q(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1}-j_s} j(1 - m_{j_s+j}). \tag{7}$$

**Замечание 2.** Формула (6) удобна для теоретического исследования свойств очередей в зависимости от свойств и структуры циклов обработки. Формула (7) удобна для практической оценки длины очереди по имеющимся статистическим данным в случае, когда длина  $j_{s+1} - j_s + 1$  очередного цикла занятости заранее не известна, а определяется компьютером в процессе обработки.

**Доказательство теоремы 1.**

Отметим важное свойство цикла обслуживания.

**Лемма 1.** Для любого цикла обслуживания  $Z_k$

$$\sum_{j=j_k}^{j_{k+1}} (m_j - \delta_j) = \sum_{j=j_s}^{j_{s+1}} (m_j - 1) = 0. \tag{8}$$

**Доказательство** вытекает из того, что окончание цикла обслуживания означает обработку всех заявок, которые поступили на всех интервалах, входящих в данный цикл обслуживания.

**Лемма 2.** Для условного математического ожидания справедлива формула  $M_{\delta_{i=1}}[m_i] = 1$ .

Лемма 2 вытекает из (8).

Последовательно применяя равенство (1) к значениям очереди в правой части (1), находим

$$q_{i-1}(\tau) = q_{i-(N+1)}(\tau) + \sum_{j=1}^N (m_{i-j}(\tau) - \delta_{i-j}(\tau)).$$

Отсюда в силу (4) (здесь и далее с точностью до бесконечно малой при  $N \rightarrow \infty$ ) имеем

$$\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_{i-(N+1)}(\tau) [m_i(\tau) - \overline{m}(\tau)] + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [m_i(\tau) - \overline{m}(\tau)] \sum_{j=1}^N [m_{i-j}(\tau) - \delta_{i-j}(\tau)].$$

С учетом (5) отсюда получаем 
$$\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [m_i(\tau) - \overline{m}(\tau)] \sum_{j=1}^N (m_{i-j}(\tau) - \delta_{i-j}(\tau)).$$

Поскольку вне цикла обслуживания будет  $m_{i-j}(\tau) = \delta_{i-j}(\tau) = 0$ , а внутри циклов обслуживания  $\delta_j = 1$ , то можем записать

$$\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [m_i(\tau) - \overline{m}(\tau)] \sum_{j: I_j \in Z_k \subset [i-N, i-1]} [m_j - 1]. \tag{9}$$

Если теперь  $i$ -й интервал находится вне цикла обслуживания т.е.  $\delta_{i-j} = m_i = 0$ , то в отрезке  $[i - N, i - 1]$  будут только полные циклы обслуживания, а по ним внутренняя сумма в (9) будет равна нулю. Возможно, будет нецелый цикл обслуживания на левом конце, но соответствующие слагаемые в (9) будут стремиться к нулю в силу гипотезы затухания взаимной корреляции. Тогда получим

$$\mu_{q_{i-1}m_i} = \frac{1}{N} \sum_{i: I_i \in Z_s, Z_s \subset [1, N]} (m_i - \overline{m}) \sum_{j: I_j \in Z_k \subset [i-N, i-1]} (m_j - 1).$$

Но все внутренние суммы по всем "полным" циклам обслуживания равны нулю кроме, возможно, самой левой и самой правой. А слагаемое, соответствующее самой левой сумме, стремится к нулю в силу (5). Поэтому

$$\mu_{q_{i-1}m_i} = \frac{1}{N} \sum_{i: I_i \in Z_s, Z_s \subset [1, N]} (m_i - \overline{m}) \sum_{j: I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_j - 1) \tag{10}$$

**Замечание 3.** Из формулы (10) видно, что в ней присутствуют слагаемые, соответствующие корреляционным связям внутри отдельных циклов обслуживания (см. замечание 1).

Преобразуем дальше формулу (10). Имеем

$$\begin{aligned} \mu_{q_i-m_i} &= \frac{1}{N} \sum_{i:I_i \in Z_s, Z_s \subset [1, N]} (m_i - \bar{m}) \sum_{j:I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_j - 1) = \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{i:I_i \in Z_s} \sum_{j:I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_i - \bar{m})(m_j - 1) = \\ &= \frac{1 - \bar{m}}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{i:I_i \in Z_s} \sum_{j:I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_j - 1) + \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{i:I_i \in Z_s} \sum_{j:I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_i - 1)(m_j - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Последняя сумма в (11) есть сумма слагаемых по всем циклам обслуживания из промежутка  $[1, N]$ . Каждое из таких слагаемых есть внутренняя двойная сумма, соответствующая фиксированному значению  $s$ . Изучим такую двойную сумму при фиксированном  $s$ .

Заметим, что ее можно рассматривать как сумму элементов нижнего треугольника (без главной диагонали!) квадратной симметричной матрицы  $A = \{a_{ij}\}$ , порядок которой равен числу интервалов обработки цикла  $Z_s$ , а элементы имеют вид  $a_{ij} = (m_i - 1)(m_j - 1)$ . В силу симметрии эта сумма равна сумме элементов верхнего треугольника. Поэтому добавим сумму элементов верхнего треугольника, разделим результат на 2, а потом добавим и отнимем недостающую сумму элементов главной диагонали. В результате получим

$$\sum_{i:I_i \in Z_s} \sum_{j:I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_i - 1)(m_j - 1) = \frac{1}{2} \sum_{i,j:I_i, I_j \in Z_s, i \neq j} (m_i - 1)(m_j - 1) = \frac{1}{2} \sum_{i,j:I_i, I_j \in Z_s} (m_i - 1)(m_j - 1) - \frac{1}{2} \sum_{i:I_i \in Z_s} (m_i - 1)^2$$

Заметим, что строчные суммы матрицы  $A$  равны нулю, поскольку, как было замечено ранее, сумма по циклу обслуживания равна нулю. А, значит, первая сумма справа в последнем выражении равна нулю, т.е.

$$\sum_{i:I_i \in Z_s} \sum_{j:I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_i - 1)(m_j - 1) = -\frac{1}{2} \sum_{i:I_i \in Z_s} (m_i - 1)^2. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получаем

$$\mu_{q_i-m_i} = \frac{1 - \bar{m}}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{i:I_i \in Z_s} \sum_{j:I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_j - 1) - \frac{1}{2N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{i:I_i \in Z_s} (m_i - 1)^2. \quad (13)$$

Отметим, что в силу гипотезы эргодичности вторая сумма в (13) есть ни что иное, как

состоятельная оценка величины  $\frac{\bar{m}}{2} D_{\delta=1}(m)$ , где  $D_{\delta=1}(m)$  – условная дисперсия. Используя известную формулу  $D[m] = M(D_\delta[m]) + D(M_\delta[m])$ , а также формулу  $M(M_\delta[m]) = M[m] = \bar{m}$ , находим  $M(D_\delta[m]) = D_{\delta=0}[m] \cdot P(\delta = 0) + D_{\delta=1}[m] \cdot P(\delta = 1) = D_{\delta=1}[m] \cdot P(\delta = 1) = D_{\delta=1}[m] \cdot \bar{m}$ ,  $D(M_\delta[m]) = (M_{\delta=0}[m] - \bar{m})^2 \cdot P(\delta = 0) + (M_{\delta=1}[m] - \bar{m})^2 \cdot P(\delta = 1) = (0 - \bar{m})^2 \cdot (1 - \bar{m}) + (1 - \bar{m})^2 \cdot \bar{m} = \bar{m}(1 - \bar{m})$ , откуда

$$D[m] = D_{\delta=1}[m] \cdot \bar{m} + \bar{m}(1 - \bar{m}). \quad (14)$$

Поскольку вторая сумма в (11) есть состоятельная оценка величины  $\frac{\bar{m}}{2} D_{\delta=1}(m)$ , то с точностью до бесконечно малой при  $N \rightarrow \infty$

$$\mu_{q_i-m_i} = \frac{1 - \bar{m}}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{i:I_i \in Z_s} \sum_{j:I_j \in Z_s, j \leq i-1} (m_j - 1) - \frac{\bar{m}}{2} D_{\delta=1}(m),$$

или же, поскольку  $\sum_{i: I_i \in Z_s} (m_i - 1) = 0$ , а  $j_{s+1} - j_s + 1$  – длина периода занятости  $Z_s$ ,

$$\begin{aligned} \mu_{q_i, m_i} &= \frac{1 - \bar{m}}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{i: I_i \in Z_s} \sum_{j: I_j \in Z_s, j \leq i} (m_j - 1) - \frac{\bar{m}}{2} D_{\delta=1}(m) = \\ &= \frac{1 - \bar{m}}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} (j_{s+1} - j_s + 1 - j)(m_{j_s+j} - 1) - \frac{\bar{m}}{2} D_{\delta=1}(m). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в обобщенную формулу Хинчина-Поллачека (3), получаем с точностью до бесконечно малой при  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \overline{q(\tau)} &= \frac{D_m(\tau) + 2\mu_{q_i, m_i}(\tau)}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} (j_{s+1} - j_s + 1 - j)(m_{j_s+j} - 1) + \frac{\bar{m}(1 - \bar{m})}{2(1 - \bar{m})} - \frac{\bar{m}}{2} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} (j_{s+1} - j_s + 1 - j)(m_{j_s+j} - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Тем самым, формула (6) доказана. Для доказательства формулы (7) преобразуем формулу (16).

$$\begin{aligned} \overline{q(\tau)} &= \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} (j_{s+1} - j_s + 1 - j)(m_{j_s+j} - 1) = \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \left[ \sum_{k=0}^{j_{s+1} - j_s} m_{j_s+k} - j \right] \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} (m_{j_s+j} - 1) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} \sum_{k=0}^{j_{s+1} - j_s} m_{j_s+k} (m_{j_s+j} - 1) - \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} j(m_{j_s+j} - 1). \end{aligned}$$

Вторая сумма в последнем выражении и есть правая часть формулы (7). Осталось показать, что первая сумма равна нулю. Действительно,

$$\frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} \sum_{k=0}^{j_{s+1} - j_s} m_{j_s+k} (m_{j_s+j} - 1) = \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{k=0}^{j_{s+1} - j_s} m_{j_s+k} \sum_{j=0}^{j_{s+1} - j_s} (m_{j_s+j} - 1) = 0,$$

так как равна нулю самая внутренняя сумма. Тем самым теорема 1 доказана полностью.

**Замечание 4.** Обозначив длину цикла обслуживания  $Z_s$  через  $N_s = j_{s+1} - j_s + 1$ , представим формулы (6) и (7) в виде

$$\overline{q(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{N_s-1} (N_s - j)(m_{j_s+j} - 1), \text{ и } \overline{q(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} \sum_{j=0}^{N_s-1} j(1 - m_{j_s+j}).$$

Полученные соотношения устанавливают непосредственную зависимость средней длины очереди от длительностей циклов обслуживания СМО.

### 5. Заключение

В подавляющем числе публикаций, анализирующих фрактальные свойства трафика, указанный трафик рассматривается как некоторый центрированный случайный процесс, при котором центрирование происходит за счет вычитания из реального процесса постоянной величины, равной математическому ожиданию. Одновременно показывается, что фрактальные процессы имеют бесконечно большой интервал корреляции, и именно корреляционные свойства являются причиной возникновения больших очередей. Вместе с тем, в реальных СМО, с коэффициентом загрузки меньше единицы, размеры очередей всегда имеют конечные значения.



В этой статье мы показали, что образование очередей в СМО происходит под воздействием двух потоков заявок, один из которых - поступающие заявки  $m_j$ , а другой - обработанные заявки  $\delta_j$ . Оба потока имеют высокую степень взаимной корреляции и корреляционные свойства входного потока заявок существенно компенсируются корреляционными свойствами потока обработки. Именно поэтому на процесс образования очередей влияют не столько фрактальные свойства трафика, сколько способность его заявок группироваться в пачки.

## 6. Литература

- [1] Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями. Том 2. / Л. Клейнрок. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
- [2] Степанов, С.Н. Теория телетрафика. Концепции, модели, приложения. / С.Н. Степанов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2015. – 808 с.
- [3] Лихтциндер, Б.Я. Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей / Б.Я. Лихтциндер // Модели инфокоммуникационных систем: разработка и применение. Приложение к журналу ИКТ. – 2011. – № 8. – С. 101-152.
- [4] Лихтциндер, Б.Я. Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей доступа / Б.Я. Лихтциндер. – Самара: ПГУТИ, 2015. – 121 с.
- [5] Бузов, А.Л. Специальная радиосвязь / А.Л. Бузов, С.А. Букашкин. – М.: Радиотехника, 2017. – 448 с.
- [6] Шелухин, О.И. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / О.И. Шелухин, А.М. Тенякшев, А.В. Осин. – М.: Изд-во Радиотехника, 2003. – 480 с.
- [7] Башарин, П.Г. Лекции по математической теории телетрафика: Учеб. пособие / П.Г. Башарин. – М.: Изд-во РУДН, 2009. – 342 с.

## On the estimation of queue lengths when processing stationary series in queueing systems with arbitrary correlation

I.A. Blatov<sup>1</sup>, B.Ya. Lihtsinder<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, L. Tolstogo street, 23, Samara, Russia, 443010

**Abstract.** Classical queuing theory studies the processing of time series in the assumption of sampling independence. However, the traffic of modern multiservice networks is usually highly correlated and the methods of the classical theory do not work. In this paper we consider generalizations of the Khinchin-Pollachek formula for the average queue length on stationary flows with arbitrary correlation and discuss the possibilities of applying the generalized formula. Results of simulation modeling and a comparative analysis of the Poisson stream of applications and the flow of applications in the case of multiservice communication networks are presented.

**Keywords:** queuing theory, time series, highly correlated traffic, queue length, Khinchin-Pollachek formula.