ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

И.А. Блатов [1], А.И. Задорин [2], Е.В. Китаева [3]

[1] Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия,
[2] Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Омск, Россия,
[3] Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия.

Рассматривается задача кубической сплайн-интерполяции функций, имеющих области больших градиентов. Показана неэффективность использования равномерных сеток. В случае кусочно-равномерных сеток, сгущающихся в зоне особенности, для традиционной сплайн-интерполяции анонсированы асимптотически точные двусторонние оценки погрешности на классе функций с экспоненциальным пограничным слоем. Приведены результаты о неравномерности этих оценок по малому параметру и о возможной расходимости интерполяционного процесса. Предложен модифицированный кубический сплайн, для которого получены равномерные по малому параметру оценки погрешности. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические оценки.

Ключевые слова: пограничный слой, сингулярное возмущение, кубическая сплайн-интерполяция, оценки погрешности.

Введение

Кубические сплайны широко применяются для гладкой интерполяции функций. Такие сплайны исследованы в [1], [2] и во многих других работах. Однако, в соответствии с [3],[4] применение полиномиальных сплайн-интерполяционных формул к функциям с большими градиентами в пограничном слое может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. В [4] построен неполиномиальный аналог кубического сплайна, точный на погранслойной составляющей. Численные эксперименты показали преимущество в точности построенного сплайна. Однако вид погранслойной составляющей не всегда известен, и в этом случае не видно разумной альтернативы сгущению сетки в погранслое. В данной работе исследуется традиционная кубическая сплайн-интерполяция [2] на кусочно-равномерной сетке, сгущающейся в пограничном слое. Получены оценки погрешности интерполяции, которые, однако, не являются равномерными по малому параметру ε. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ погрешность интерполяции погранслойной составляющей может неограниченно возрастать, и необходима разработка специальных методов интерполяции для данного класса задач. Такой метод интерполяции также предложен и исследован в данной работе. Отметим, что расходимость интерполяционных процессов кубическими и параболическими сплайнами на неравномерных сетках рассматривалась в работах [2], [5], [6] и ряде других, однако рассмотренные там примеры расходимости либо носили очень искусственный характер, либо устанавливались неявным образом с помощью теоремы Банаха-Штейнгауза. В настоящей статье нами показана расходимость для функций, описывающих решения широкого класса прикладных задач. Данные результаты свидетельствуют о необходимости разработки универсальных методов высокого порядка гладкой сплайн-интерполяции функций на сильно неравномерных сетках и проекционно-сеточных методов высокого порядка для сингулярно возмущенных краевых задач, поскольку при применении проекционно-сеточных методов не возникает необходимость в интерполяции сеточного решения.

Постановка задачи

Введем обозначения. Пусть $\Omega: 0 = x_0 < x_1 < \cdots$

$< x_N = 1 -$ разбиение отрезка $[0,1]$. Обозначим через $S(\Omega, k, 1)$ пространство полиномиальных сплайнов [2] степени k дефекта 1 на сетке Ω. Под C, C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от малого параметра ε и числа узлов сетки. Будем писать $f = O(g)$, если справедлива оценка $|f| \le C|g|$ и $f = O^*(g)$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$, $C[a,b] -$ пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|\cdot\|_{C[a,b]}$.

Пусть интерполируемая функция $u(x)$ представима в виде

$$u(x) = q(x) + \Phi(x),\ x \in [0,1], \tag{1}$$

где при $0 \le j \le 4$

$$\left|q^{(j)}(x)\right| \le C_1,\ \left|\Phi^{(j)}(x)\right| \le C_1 e^{-\alpha x/\varepsilon} / \varepsilon^j. \tag{2}$$

Изучим задачу кубической сплайн-интерполяции функции (1).

Формулировка основных результатов

Вначале рассмотрим случай равномерной сетки. Пусть N – натуральное число, Δ – равномерное с шагом $H = 1/N$ и узлами $x_n, n = 0,1,\cdots,N,$ разбиение отрезка $[0,1]$. Пусть $g_3(x,u) \in S(\Delta,3,1)$ – интерполяционный кубический сплайн на сетке Δ, определяемый из условий

$$g_3(x_n,u) = u(x_n),\ 0 \le n \le N,\ g_3'(0,u) = u'(0),$$

$$g_3'(1,u) = u'(1). \tag{3}$$

Теорема 1. *В случае равномерной сетки найдется такая константа C, что будет справедлива оценки*

$$\|u(x) - g_3(x,u)\|_{C[0,1]} \le C(N\varepsilon)^{-4}.$$

Если в (1) $\Phi(x) = e^{-\alpha x/\varepsilon}$, то имеет место и оценка снизу

$$\|u(x) - g_3(x,u)\|_{C[0,1]} \ge C_1 \min\left\{(N\varepsilon)^{-1}, (N\varepsilon)^{-4}\right\}.$$

Далее в соответствии с [7] зададим сетку Ω с узлами $x_n, n = 0,1,\cdots,N$, и шагами

$$h_n = h = \frac{\sigma}{N/2},$$

$$n = 1,\cdots,\frac{N}{2},\ \ h_n = H = \frac{1-\sigma}{N/2}, n = \frac{N}{2}+1,\cdots,N.$$

В соответствии с [7] зададим

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}. \qquad (4)$$

В силу [2] для интерполяционного кубического сплайна $g_3(x,u) \in S(\Omega,3,1)$ справедлива оценка погрешности

$$|g_3(x,u) - u(x)| \le \frac{5}{384}\left\|u^{(4)}\right\|_{C[0,1]} \max_n h_n^4. \qquad (5)$$

Заметим, что $g_3(x,u) = g_3(x,q) + g_3(x,\Phi)$, а в силу (2),(5)

$$\left\|q(x) - g_3(x,q)\right\|_{C[0,1]} \le C_2 \max_n h_n^4 \le C_2 N^{-4}.$$

Поэтому для построения сплайна, аппроксиммирующего $u(x)$ с порядком $O(N^{-4}\ln^4 N)$, необходимо и достаточно обеспечить оценку

$$\left\|\Phi(x) - g_3(x,\Phi)\right\|_{C[0,1]} \le C_2 N^{-4}\ln^4 N. \qquad (6)$$

В случае, когда в (6) $\sigma = 1/2$, оценка (6) будет иметь место в силу теоремы 1 и того, что в этом случае $N\varepsilon = O^*(N/\ln N)$. Поэтому ниже будем предполагать, что $\sigma < 1/2$. Также для краткости будем использовать обозначение $g_3(x) = g_3(x,\Phi),\ \ g_3(x) \in S(\Omega,3,1)$.

Теорема 2. *Найдутся такие константы C_2, C_3, что при $N^{-1} \le C_3\varepsilon$ будут справедливы оценки (6).*

Теорема 3. *Найдутся такие константы C_4, C_5 и $\beta > 0$, не зависящие от ε, N, что при $\varepsilon \le C_4 N^{-1}$ будут справедливы оценки*

$$\left\|g_3(x) - \Phi(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C_5\begin{cases} N^{-4}\ln^4 N, 0 \le n \le N/2-1 \\ \dfrac{N^{-5}}{\varepsilon} e^{-\beta(n-N/2)}, N/2 \le n \le N-1 \end{cases}. \qquad (7)$$

Следующая теорема показывает, что оценки (7) не улучшаемы.

Теорема 4. Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. *Тогда найдутся такие* $C_4, C_6, \beta_1 > 0$, *не зависящие от* ε, N, *что при* $\varepsilon \le C_4 N^{-1}$ *будут справедливы оценки снизу*

$$\|g_3(x) - \Phi(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \ge C_6 \frac{N^{-5}}{\varepsilon} e^{-\beta_1(n-N/2)},$$

$$\frac{N}{2} \le n \le N - 1.$$

Построим модифицированный интерполяционный сплайн. Положим $\bar{x}_{N/2} = (x_{N/2} + x_{N/2+1})/2$,

$\bar{x}_n = x_n,\ n \in [0, N/2-1] \cup [N/2+1, N]$. Пусть $gm_3(x,u)$ – интерполяционный кубический сплайн. определяемый из условий $gm_3(\bar{x}_n, u) = u(\bar{x}_n)$, $n \in [0, N]$, $gm_3'(0,u) = u'(0)$, $gm_3'(1,u) = u'(1)$.

Единственным отличием $gm_3(x,u)$ от $g_3(x,u)$ является то, что узел интерполяции $x_{N/2}$ заменяется узлом $\bar{x}_{N/2}$. Узлы самого сплайна при этом не меняются и совпадают с узлами Ω.

Теорема 5. Найдутся такие не зависящие от ε, N константы $\gamma_0 > 0, C,$ что при $\varepsilon \ln N \le \gamma_0$ будет справедлива оценка

$$\|u(x) - gm_3(x,u)\|_{C[0,1]} \le CN^{-4} \ln^4 N. \qquad (8)$$

Замечание 1. *Условие* $\varepsilon \ln N \le \gamma_0$ *будет выполнено при* $\varepsilon \le CN^{-1}$.*Поэтому в силу теорем 2,5 применение интерполяционного сплайна* $gm_3(x,u)$ *при* $\varepsilon = O(N^{-1})$ *и интерполяционного сплайна* $g_3(x,u)$ *при* $N^{-1} = O(\varepsilon)$ *позволяет получить равномерные по* ε, N *оценки вида (5),(8).*

Результаты численных экспериментов

Зададим функцию

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}, x \in [0,1]. \qquad (9)$$

Результаты расчетов сведены в три таблицы. В таблицах приведены максимальные погрешности сплайновой интерполяции. вычисленные в узлах сгущенной сетки, получающейся из исходной расчетной сетки разбиением каждого ее сеточного интервала на 10 равных частей. В таблице 1 приведены погрешности для традиционного кубического сплайна на равномерной сетке. они подтверждают оценки теоремы 1 и непригодность применения равномерной сетки при малых ε. В таблице 2 приведены погрешности для традиционного кубического сплайна на сетке Шишкина. Из таблиц видно, что погрешность возрастает при уменьшении ε для фиксированного N. Результаты таблицы 3 для модифицированного сплайна, напротив, демонстрируют равномерную сходимость, что подтверждает теоретические выводы.

Табл. 1. Погрешность кубического сплайна на равномерной сетке.

N / ε	16	32	64	128	256	512
1	2.82e-7	1.76e-8	1.16e-9	1.02e-10	4.30e-11	**2.68e-13**
10e-1	3.43e-4	2.33e-5	1.51e-6	9.58e-8	6.03e-9	**4.11e-10**
10e-2	0.43	8.38e-2	9.72e-2	8.00e-4	5.59e-5	**3.65e-6**
10e-3	9.88	4.58	1.93	0.66	0.15	**2.03e-2**
10e-4	1.05e+2	5.23e+1	2.58e+1	1.25e+1	5.90	**2.59**
10e-5	1.06e+3	5.23e+2	2.64e+2	1.32e+2	6.56e+1	**3.24e+1**
10e-6	1.06e+4	5.30e+3	2.65e+3	1.33e+3	6.62e+2	**3.30e+2**
10e-7	1.06e+5	5.30e+4	2.65e+4	1.33e+4	6.63e+3	**3.30e+3**
10e-8	**1.06e+6**	**5.30e+5**	**2.65e+5**	**1.33e+5**	**6.63e+4**	**3.31e+4**

Табл. 2. Погрешность кубического сплайна на кусочно-равномерной сетке.

N / ε	16	32	64	128	256	512
1	2.82e-7	1.76e-8	1.16e-9	1.02e-10	4.30e-11	**2.68e-13**
10e-1	3.43e-4	2.33e-5	1.51e-6	9.58e-8	6.03e-9	**4.11e-10**
10e-2	6.43e-3	1.18e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.27e-6	**2.31e-7**
10e-3	6.43e-3	1.18e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.27e-6	**2.31e-7**
10e-4	6.43e-3	1.18e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.27e-6	**2.31e-7**
10e-5	4.47e-2	1.25e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.27e-6	**2.31e-7**
10e-6	4.47e-1	1.25e-2	3.62e-4	2.07e-5	2.27e-6	**2.31e-7**
10e-7	4.47	1.25e-1	3.62e-3	1.07e-4	3.24e-6	**2.31e-7**
10e-8	**4.47**	**1.25**	**3.62e-2**	**1.07e-3**	**3.24e-5**	**9.92e-7**

Табл. 3. Погрешность модифицированного кубического сплайна на кусочно-равномерной сетке.

N / ε	16	32	64	128	256	512
1	3.1e-7	2.0e-8	1.3e-9	1.1e-10	4.9e-12	**3.1e-13**
10e-1	3.4e-4	2.3e-5	1.5e-6	9.6e-8	6.03e-9	**4.1e-10**
10e-2	6.43e-3	1.2e-3	1.7e-4	2.1e-5	2.3e-6	**2.3e-7**
10e-3	6.43e-3	1.2e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.3e-6	**2.3e-7**
10e-4	6.43e-3	1.2e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.3e-6	**2.3e-7**
10e-5	6.43e-3	1.2e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.3e-6	**2.3e-7**
10e-6	6.43e-3	1.2e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.3e-6	**2.3e-7**
10e-7	6.43e-3	1.2e-3	1.70e-4	2.07e-5	2.3e-6	**2.3e-7**
10e-8	**6.43e-3**	**1.2e-3**	**1.70e-4**	**2.07e-5**	**2.3e-6**	**2.3e-7**

На рисунках 1-3 приведены графики иллюстрирующие расходимость традиционного процесса интерполяции при $\varepsilon N^{-5} \to 0$. На рисунке 1 приведены графики $u(x)$ и $g_3(x)$ при $\varepsilon = 10^{-7}, N = 16$ во всей расчетной области, а на рисунках 2 и 3 − те же графики в области пограничного слоя.

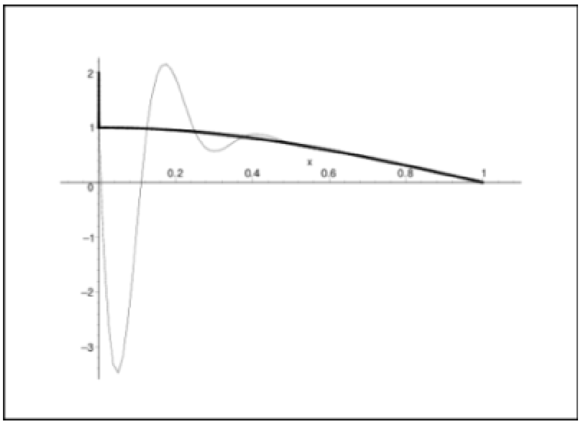

Рис. 1. Графики функции (9) и ее интерполяционного сплайна (кусочно-равномерная сетка) на интервале [0,1].

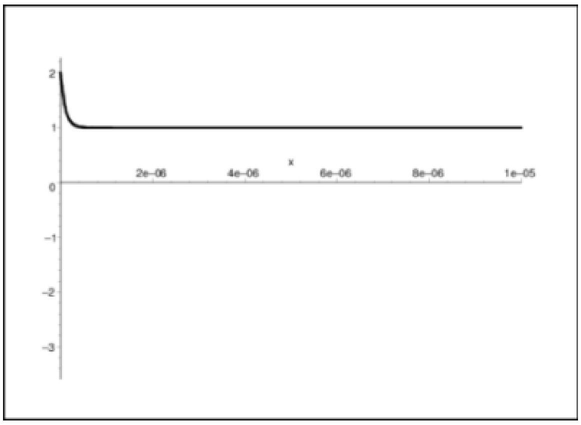

Рис. 2. Графики функции (9) и ее интерполяционного сплайна (кусочно-равномерная сетка) на интервале [0,0.00005].

На рисунке 2 функции $u(x)$ и $g_3(x)$ близки и их графики сливаются.

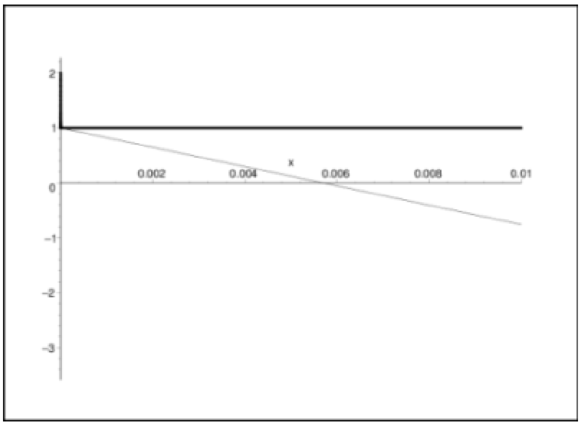

Рис. 3. Графики функции (9) и ее интерполяционного сплайна (кусочно-равномерная сетка) на [0,0.01].

Заключение

Изучены интерполяционные сплайны для функций с пограничным слоем. Анонсированы результаты о непригодности равномерных сеток, о неравномерной по малому параметру сходимости традиционной сплайн-интерполяции для кусочно-равномерных адаптивных сеток. Построен модифицированный интерполяционный сплайн, для которого анонсирована теорема о равномерной сходимости. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-06584).

Литература

1. Ahlberg J.H. Yhe theory of splines and their applications / J. H.Ahlberg, E.N.Nilson, J.L. Walsh.− New York: Academic Press, 1967.
2. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций /Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, Н.Л. Мирошниченко. − М. : Наука, 1980.
3. Задорин, А.И. Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем / А.И. Задорин // Сибирский журнал вычислительной математики. − 2007. − Т.10. − №3. − С. 267-275.
4. Zadorin A.I. Analogue of a cubic spline foe a function with a boundary layer component / A.I. Zadorin, M.V. Guryanova // Proceedings of the fifth conference of finite difference methods: Theory and Applications, 2010. − 2010. Rousse: Rousse University, 2011. P. 166-173.
5. Зматраков Н.Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов / Н.Л. Зматраков // Труды МИАН. − 1975. − Т. 138. − С. 71-93.
6. Зматраков Н.Л. Необходимое условие сходимости интерполяционных параболических и кубических сплайнов / Н.Л. Зматраков // Математические заметки. − 1976. − Т. 19. − №3 − С. 165-178.
7. Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и парабольческих сингулярно возмущенныъх уравнений / Г.И. Шишкин. − Екатеринбург: УРО РАН, 1992 .