О затягивании потери устойчивости в одной механической задаче

Е.В. Щетинина[a]

[a] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443001, ул. Молодогвардейская, 151, Самара, Россия

Аннотация

Рассматривается разнотемповая система дифференциальных уравнений, описывающая колебания двухзвенного маятника под воздействием следящей внешней силы. Исследуются вопросы возникновения устойчивых колебательных движений в зависимости от параметров системы, а также значения следящей силы. Определяются критические значения параметров, при которых происходит изменение устойчивости положения равновесия системы, что приводит к росту амплитуды колебаний. Исследуются условия, при которых изменение характера движений происходит постепенно и скачкообразно.

Ключевые слова: разнотемповые системы; затягивание потери устойчивости; двухзвенный маятник

1. Введение

Численное исследование сложных динамических систем часто бывает затруднено из-за высокой размерности системы и наличия малых или больших параметров. В таких случаях бывает целесообразно применять комбинации численных и аналитических методов. С помощью аналитических методов можно понизить размерность системы, сузить область исследования, определить области различного поведения, допустимые значения параметров. А затем, применяя численные методы, можно далее исследовать поведение системы. Одним из методов аналитического исследования является метод интегральных многообразий, с помощью которого можно разделить быстрые и медленные движения, понизить порядок системы. В работе будет рассмотрена динамическая система, описывающая колебания двухзвенного маятника с жесткими пружинами под воздействием внешней следящей силы. Такого рода модели встречаются при исследовании задач строительной динамики. С помощью метода интегральных многообразий мы понизим порядок системы и выделим области, в которых поведение системы будет различным. Затем проведем численное моделирование системы при различных значениях параметров.

2. Метод интегральных многообразий

Метод интегральных многообразий является достаточно эффективным способ исследования сложных динамических систем. Основы этого метода были заложены в работах Боголюбова Н.Н., Митропольского Ю.А., Лыковой О.Б. Большое распространение этот метод получил для исследования систем, в которых различные переменные имеют различные скорости, так называемые разнотемповые системы [3]. Опишем основные идеи этого метода. Рассматривается система с быстрыми и медленными движениями:

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y,a,\varepsilon),\varepsilon\frac{dy}{dt}=g(x,y,a,\varepsilon), \qquad (1)$$

где $x\in R^n, y\in R^m, t\in R$, a – параметр, $0<\varepsilon\ll 1$. Здесь x – медленная переменная, y – быстрая переменная. Под интегральным многообразием понимается инвариантная поверхность дифференциальной системы. Среди интегральных многообразий системы (1) особый интерес представляют многообразия размерности медленной переменной, которые описываются уравнением $y=h(x,\varepsilon)$. Предполагается, что функция h достаточно гладко зависит от ε. Такие многообразия называются интегральными многообразиями медленных движений. Движение по медленному интегральному многообразию осуществляется в соответствии с уравнением
$\dot{x}=f(x,h(x,\varepsilon),\varepsilon)$.

Предположим, что вырожденное уравнение $g(x,y,a,0)=0$ имеет изолированное решение $y=h_0(x,a)$. Тогда поверхность Г, задаваемая соотношением $y=h_0(x,a)$, называется медленным интегральным многообразием системы (1). Лист медленной поверхности устойчив, если собственные числа матрицы $\partial g/\partial y(x,h_0(x,a),a)$ имеют отрицательные вещественные части. Если хотя бы у одного из собственных чисел этой матрицы вещественная часть становится положительной, то лист теряет устойчивость. В ε-окрестности устойчивого и неустойчивого листов медленной поверхности лежат устойчивое и неустойчивое медленные интегральные многообразия. Медленное интегральное многообразие представляет собой инвариантную поверхность, движение по которой осуществляется со скоростью порядка единицы.

Поверхность, на которой существуют собственные числа матрицы $\partial g/\partial y(x,h_0(x,a),a)$ с нулевой вещественной частью, называют поверхностью смены устойчивости. Наличие дополнительного параметра a обеспечивает условия для того, чтобы устойчивое и неустойчивое интегральные многообразия можно было склеить в одной точке поверхности срыва [1]. Именно через эту точку проходит траектория, которая является уткой.

Определение. Траектория сингулярно возмущенной системы (1) называется траекторией-уткой, если она проходит вначале вдоль устойчивого листа медленной поверхности, а затем вдоль неустойчивого, причем оба раза расстояния порядка единицы.

Существует еще один тип смены устойчивости, при котором существует пара комплексно сопряженных собственных чисел, пересекающих вещественную ось в некоторый момент. Тогда в аналитических системах наблюдается эффект затягивания потери устойчивости. Этот эффект был подробно описан в работах Нейштадта А.И. [2]. Заметим, что существование дополнительного управляющего параметра в системе может влиять на изменение времени затягивания потери устойчивости [4].

3. Маятник Циглера

Рассмотрим двухзвенный маятник, на который действует внешняя следящая сила (рис. 1) [5]:

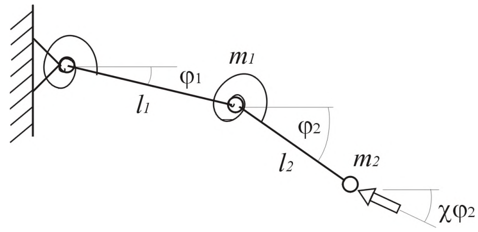

Рис. 1. Маятник Циглера.

Поведение этой системы описывается уравнениями Лагранжа. В случае, когда маятник Циглера имеет достаточно жесткие пружины, трение в которых достаточно велико, система дифференциальных уравнений, описывающая поведение маятника, становится разнотемповой. Предположим, что значение следящей силы P медленно увеличивается. Применяя метод интегральных многообразий и рассматривая систему в малой окрестности первого приближения медленного многообразия, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\ } = \varepsilon,$$
$$= - \quad + \kappa\ (1+\mu)\cos(\quad) + \cos(\quad)\ + p\ \sin(\chi\varphi\ - \quad) - \sin\ (\quad - 1) \qquad ,$$
$$= - \quad + \kappa\quad 2\cos(\quad) + (1+\mu)\cos(\quad)\ + p\ \ 2\sin\ (\quad - 1) \quad - \sin(\chi\varphi\ - \quad) \quad .$$

Здесь κ — параметр системы, обратно пропорциональный жесткости пружин, $\mu = m\ /\ $. Так как жесткость пружин маятника достаточно велика, то коэффициент κ является малым параметром. Система имеет положение равновесия $=\varphi\ = 0$. Рассмотрим систему первого приближения и исследуем ее на устойчивость.

$$\dot{\ } = \varepsilon,$$
$$= - \quad (\ - 1) + \varphi\ \ (1 - 2\ )\ ,$$
$$= - \ \ p\varphi\ - \quad 1 + p(3\ \ - 2) \quad .$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\lambda + 1 - 3/2\ \ (1 - \ \ ) \quad + p\ /4\,(1 - \ \ )(9\ \ - 5) = 0.$$

Следовательно, при $0<\chi< 5/9$ система имеет пару вещественных собственных чисел, а при $5/9 <\chi<1$ система имеет пару комплексно сопряженных корней. Существует такое значение p_{cr}, определяемое соотношением

$$_{cr} = 3/2 - 1/2\ \ \ \overline{(5 - 9\ \ )/(1 - \ \ )}$$

что при $p<p_{cr}$ решения характеристического уравнения имеют вещественную часть меньше нуля, а при $p>p_{cr}$ – хотя бы одно собственное число имеет положительную вещественную часть. Следовательно, нулевое решение является притягивающим при $p<p_{cr}$ и отталкивающим при $p>p_{cr}$. Решения, начинающиеся при $p<p_{cr}$ в малой окрестности нулевого решения, остаются в ней до момента $p>p_{cr}$, а затем происходит срыв решений с нуля. Отметим, что чем меньше модуль начального значения при фиксированном начальном значении p, тем дольше время затягивания потери устойчивости.

На следующих рисунках показано численное исследование траекторий системы при различных значениях параметра χ и начальных значениях следящей силы p. Значение следящей силы, при которой происходит смена устойчивости медленной кривой $=\varphi\ = 0$обозначено крестиком. Отметим, что на графиках хорошо видно, что время, проведенное около неустойчивого участка медленной кривой, зависит от начального значения следящей силы. Чем меньше начальное значение, тем больше времени решение проводит около устойчивого участка медленной кривой, а затем около неустойчивого. Поведение решений при различных начальных условиях показано на следующих рисунках. На рис.2 представлены решения с различными начальными условиями в при $\chi< 5/9$, на рис.3 – при $\chi> 5/9$.

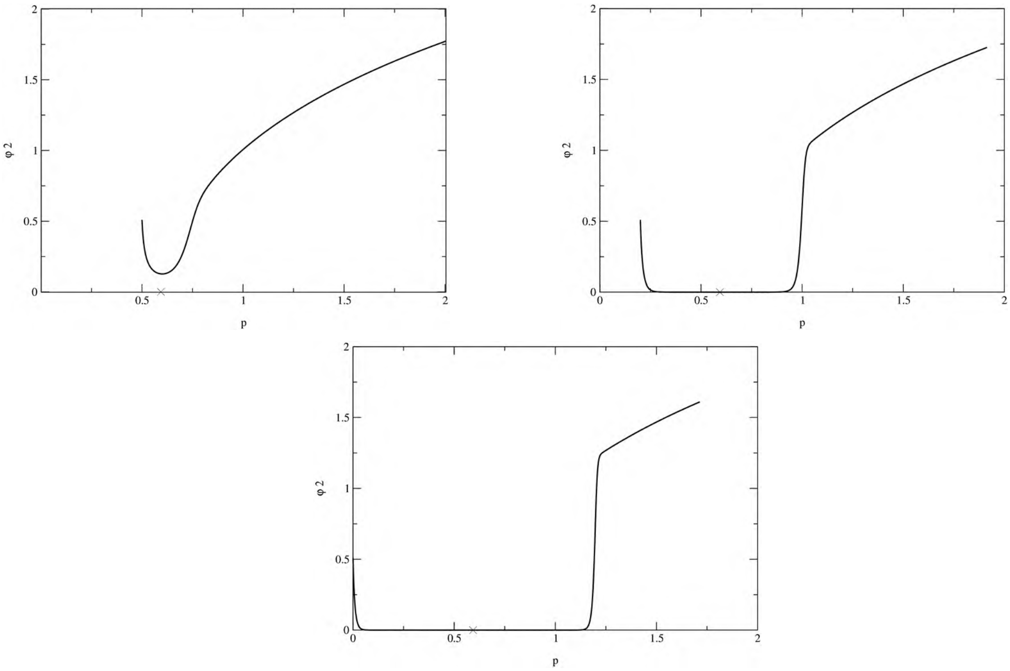

Рис. 2. Траектории-утки при различных начальных значениях следящей силы.

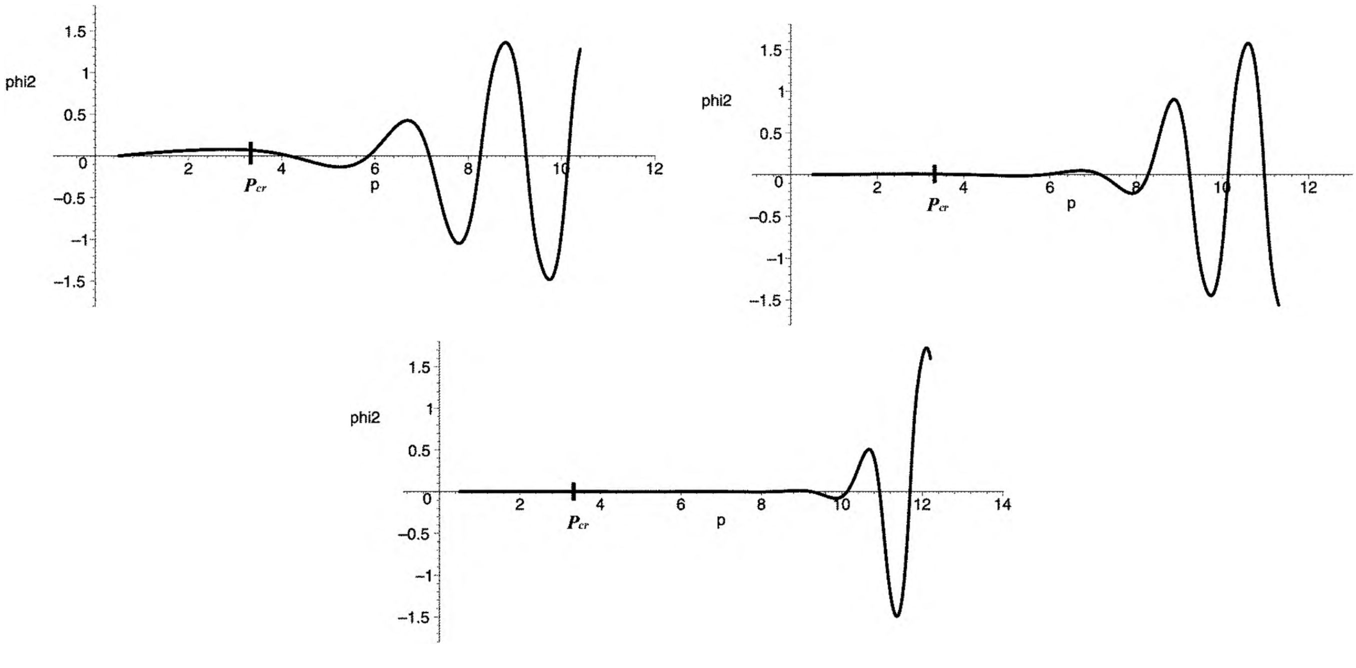

Рис. 3. Изменение времени затягивания потери устойчивости при изменении начального значения силы.

Литература

[1] Горелов, Г.Н. Сингулярно возмущенные модели горения / Г.Н. Горелов, В.А. Соболев, Е.А. Щепакина // Самара, Сам:Вен, 1999. 198 с.
[2] Нейштадт, А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях /А.И. Нейштадт // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 2060-2067; 1988. – Т. 24, № 2. – С. 226-233.
[3] Стрыгин, В.В. Разделение движений методом интегральных многообразий / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. М.:Наука, 1988. 256 с.
[4] Щетинина, Е.В. Интегральные многообразия быстро-медленных систем и затягивание потери устойчивости /Е.В. Щетинина // Вестник СамГУ. Естеств.-научн. Сер. – 2010. – №6(80). – С.93-105.
[5] Ziegler, H. Die Stabilitaetskriterien der Elastomechanik /H. Ziegler// Ingenieur-Archiv, 1952. – Band XX. – S. 49-56.