# О возможностях изучения проблемы эволюции человеческого общества с помощью простых математических моделей

Л.Г. Теклина

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, Россия*

**Аннотация**

На базе простой математической модели для изолированного сообщества «производители – управленцы – продукт» рассматриваются возможности перехода от нестабильного сообщества с периодически возникающими кризисными явлениями к глобально устойчивому, стабильному и динамически развивающемуся сообществу в условиях технического прогресса. Основной инструмент исследования математической модели – методы распознавания образов.

*Ключевые слова:* математическая модель; динамическая система; фазовый и параметрический портреты; распознавание образов

## 1. Введение

С нашей точки зрения, желание более глубокого изучения проблемы эволюции человеческого общества может быть реализовано через создание и исследование математических моделей, способных объяснить наблюдаемую реальность и подсказать возможные пути ее совершенствования. Составление адекватной модели для столь сложного и многообразного объекта, как человеческое общество, - задача, по-видимому, безнадежная. Представляют интерес простые математические модели, которые дают возможность проанализировать достаточно сложные объекты. При этом едва ли эволюцию общества можно описать как динамическую систему. Но можно ввести основные характеристики общества и описать их взаимодействие с помощью динамической системы, дополнив модель весьма значительным числом параметров, характеризующих описываемое общество. Таким образом, появляется возможность изучить эволюцию общества в зависимости от изменения параметров модели. Пример такой модели - простая математическая модель сообщества «производители – управленцы – продукт» - представлен в работе [1]. Упрощенный вариант этой модели был исследован аналитически, частично подтвержден, а частично дополнен небольшим численным исследованием, возможности которого оказались весьма ограничены для системы с 15 параметрами. Но даже те неполные результаты, что были при этом получены, оказались весьма любопытными, были проанализированы историком, подтверждены фактами из истории развития мирового сообщества и вызвали заинтересованный отклик читателей [2]. И в силу нашего интереса к этой теме, и в силу появившихся новых возможностей численного исследования многомерных динамических систем с большим числом параметров мы решили вернуться к этой модели, но уже в ее полном исходном варианте.

## 2. Краткое представление модели

Исследуется модель изолированного сообщества «производители (те, кто непосредственно производят продукт) – управленцы (продукт не производят, но способствуют его производству) – продукт (все, что нужно для жизни человека, что он потребляет и чем он пользуется)». Величины $x$, $y$, $z$ – это численность производителей, управленцев и количество произведенного обществом продукта. Взаимодействие между ними описывается (в весьма грубом приближении) следующей простой моделью в виде системы трех дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = (a - bx - ly + cz)x$$

$$\dot{y} = (-d - mx - ey + fz)y$$

$$\dot{z} = \begin{cases} F = g\dfrac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}\dfrac{\mu x}{1+\delta z} - hx - ky & if \quad z > 0 \quad or \quad z = 0 \,\&\, F > 0 \\ 0 & if \quad z = 0 \,\&\, F \le 0 \end{cases}$$

Эта модель отражает факт объединения конкурирующих людей в общество для более эффективного производства необходимого для жизни продукта. Модель содержит 15 параметров, отражающих уровень развития технологии ($g$), уровень управления производством ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$), характеристики, учитывающие увеличение трудности производства с ростом его объема и амортизации ($\mu, \delta$), перераспределение произведенного продукта между производителями и управленцами ($c, f, h, k$), конкуренцию внутри каждой из групп ($a,b$ и $d,e$), давление одной группы на другую ($l,m$). Подробное описание модели можно найти в работе [1].

## 3. Применение методов распознавания образов к численному исследованию динамических систем

В работах [3,4] представлена новая методика численного исследования динамических систем методами распознавания образов с активным экспериментом. Эта методика основана на формировании выборки данных об исследуемом явлении с помощью соответствующей математической модели и последующем ее анализе методами распознавания образов. Стандартные процедуры методики включают в себя:

- изучение всех возможных видов установившихся движений в фазовом пространстве системы (аттракторов);
- построение огрубленных фазовых портретов в виде совокупности аттракторов и областей их притяжения в фазовом пространстве при заданных значениях параметров;
- изучение зависимости огрубленного фазового портрета от значений параметров путем построения огрубленного параметрического портрета динамической системы.

Эти задачи решаются для любых математических моделей, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, вне зависимости от их конкретного содержания. Решение их формализовано и частично автоматизировано. Все получаемые при этом результаты являются статистически достоверными с заданной вероятностью $p_0$. К тому же они могут стать основой для решения нестандартных проблем, специфических для конкретной исследуемой математической модели. Такие проблемы обычно связаны с изучением зависимости движений в фазовом пространстве системы от параметров модели. Алгоритм их решения включает в себя следующие этапы:

- Формулировка проблемы как задачи анализа и исследования динамики аттракторов или фазовых портретов системы.
- Постановка исследуемой проблемы как задачи распознавания образов.
- Формирование обучающей выборки для решения поставленной задачи в пространстве параметров системы на основе данных об аттракторах или фазовых портретах системы.
- Выбор признаков, информативных для решения задачи. Информативными для решения задачи распознавания признаются те признаки (параметры системы), изменение которых приводит к переходу объекта из одного распознаваемого класса в другой.
- Поиск скрытых закономерностей путем использования различных методов интеллектуального анализа данных на множестве выделенных признаков (построение решающих правил распознавания, кластеризация, регрессионный анализ и др.).

## 4. Результаты аналитического и численного исследования математической модели «производители – управленцы – продукт» методами распознавания образов

Качественное исследование модели как динамической системы сводится к изучению фазовых портретов системы и зависимости их от параметров. Выяснение всех возможных видов аттракторов и фазовых портретов системы в их огрубленном варианте, построение огрубленного параметрического портрета системы осуществлено численными методами, основанными на применении идей и алгоритмов распознавания образов. Все результаты являются статистически достоверными с вероятностью $p>0.99$.

Ниже приведены как уже опубликованные материалы по качественному исследованию модели [4,5], необходимые для понимания излагаемого, так и новые данные.

Аттракторы, или установившиеся движения в фазовом пространстве системы при заданных значениях параметров, соответствуют возможным устойчивым сообществам. Среди аттракторов системы – состояния равновесия (стабильные сообщества) и периодические движения (нестабильные, но устойчивые сообщества). Обнаружены всего три вида возможных устойчивых состояний равновесия типа $(x^*, y^*, z^*)$: $P(x^* \neq 0, y^* \neq 0, z^* \neq 0)$ - устойчивое сообщество «производители – управленцы - продукт», $P_y(x^* \neq 0, y^* = 0, z^* \neq 0)$ - устойчивое сообщество «производители – продукт» и $P_{yz}(x^* \neq 0, y^* = 0, z^* = 0)$ - устойчивое сообщество «производители». Устойчивые периодические движения, когда все три переменные периодически изменяются в интервале значений $x_{\min} \le x \le x_{\max}$, $y_{\min} \le y \le y_{\max}$, $z_{\min} \le z \le z_{\max}$, представлены чуть шире, но чаще всего встречаются тоже три типа циклов: $C(x_{\min} > 0, y_{\min} > 0, z_{\min} > 0)$, $C_z(x_{\min} > 0, y_{\min} > 0, z_{\min} = 0)$ и $C_{yz}(x_{\min} > 0, y_{\min} = 0, z_{\min} = 0)$. Для некоторых циклов характерны периоды, когда некоторые переменные остаются практически неизменными. В частности, моменты достижения и сохранения $z_{\min} = 0$ можно рассматривать как кризисное явление.

Огрубленные фазовые портреты динамической системы дают представление о том, какие устойчивые сообщества могут существовать в обществе, характеризуемом определенным набором параметров. Проведенные исследования показали, что в системе могут существовать фазовые портреты с одним аттрактором, это – три вида состояний равновесия $P_{yz}, P_y, P$ и все возможные циклы, а также портреты с двумя аттракторами: $P_{yz}\,\&\,P$, $P_{yz}\,\&\,C$, $P_y\,\&\,P$, $P_y\,\&\,C$. При каких условиях существуют те или иные фазовые портреты?

Уточненные ***статистически достоверные*** данные о соотношениях между параметрами для разных фазовых портретах представлены в таблицах 1-2, где $g_0 = \dfrac{h}{\mu}\left(1 + \delta \dfrac{am + bd}{bf - cm}\right)$.

**Таблица 1.** Фазовые портреты при $bf - cm \le 0$

| $bf - cm \le 0$ | | |
|---|---|---|
| Соотношения между параметрами | $g \le h$ | $g > h$ |
| $ce - lf < 0$ | $P_{yz}$ | $P_y, P, C, C_z, C_{yz},...$ |
| $ce - lf \ge 0$ | | $P_y$ |

**Таблица 2.** Фазовые портреты при $bf - cm > 0$

| $bf - cm > 0$ | | | |
|---|---|---|---|
| Соотношения между параметрами | $g \le h$ | $h < g \le g_0$ | $g > g_0$ |
| $ce - lf < 0$ | $P_{yz}, P_{yz}$ & $P, P_{yz}$ & $C$ | $P_y, P_y$ & $P, P_y$ & $C$ | $P, C, C_z, C_{yz},...$ |
| $ce - lf \ge 0$ | $P_{yz}, P_{yz}$ & $P$ | $P_y, P_y$ & $P$ | $P$ |

Полученные результаты свидетельствуют, что ***статистически достоверными*** можно считать следующие выводы:
***Вывод 1.*** $bf - cm > 0$ & $\varepsilon > 1$ – необходимые условия появления сообществ $P$ и $C$ при $g \le h$.

***Вывод 2.*** $ce - lf < 0$ & $\varepsilon > \varepsilon^*(g)$ - необходимые условия возникновения нестабильных сообществ $C, C_z, C_{yz},...$

***Вывод 3.*** $g > g^* > \dfrac{h}{\mu}\left(1 + \delta\dfrac{am + bd}{bf - cm}\right)$ & $bf - cm > 0$ & $ce - lf > 0$ - достаточные условия существования глобально устойчивого стабильного сообщества $P$ «производители – управленцы – продукт».

## 5. Постановка задачи

Исследование возможных путей эволюции сообщества при тех или иных условиях сводится к изучению зависимости аттракторов и фазовых портретов от параметров. Рассмотрим возможности перехода от нестабильного сообщества с периодически возникающими кризисными явлениями к глобально устойчивому, стабильному и динамически развивающемуся сообществу «производители – управленцы – продукт» в условиях технического прогресса. В математических терминах эта задача звучит следующим образом: какие параметры и каким образом надо изменить, чтобы от устойчивого цикла $C$ ($C_z, C_{yz},...$) перейти к глобально устойчивому состоянию равновесия $P(x^* \ne 0, y^* \ne 0, z^* \ne 0)$, которое характеризуется тем, что величина $\dfrac{z^*}{x^* + y^*}$ увеличивается с ростом $g$.

Исходя из данных аналитического и численного исследования, представленных в таблицах 1-2, и условия задачи $g \to \infty$ (технический прогресс) можно считать, что имеет место глобально устойчивый цикл любого вида $C, C_z, C_{yz},...$, а начальные условия в фазовом пространстве могут быть любыми. Такой цикл может существовать только при условии $ce - lf < 0$, но величина $bf - cm$ может принимать любые значения.

## 6. О переходе от нестабильного сообщества «производители – управленцы – продукт» к стабильному

Можно ли перейти к стабильному сообществу при $g \to \infty$, не изменяя других параметров системы?
Вне зависимости от знака величины $bf - cm$ особенностью глобально устойчивого периодического движения (нестабильное сообщество) является то, что с ростом $g$ при сохранении других параметров нестабильность не исчезает, т.е. цикл никогда не переходит в устойчивое состояние равновесия. Уровень развития производительных сил не гарантирует стабильности общества, более того, увеличение $g$ всегда сопровождается ростом амплитуды колебаний и может привести к появлению кризисных явлений - переходу цикла $C$ в цикл $C_y, C_z, C_{yz},...$. Пример этого представлен на рис.1, где график зависимости $z(t)$ демонстрирует появление временного интервала, когда $z = 0$, при увеличении параметра $g$. При наличии кризисных явлений (например, цикл $C_z$) рост $g$ также не приводит к их исчезновению, более того, кризисные явления могут углубиться, например, может увеличиться длительность периода с $z = 0$, как это произошло в случае, изображенном на рис.2.

Интересно, что аналогичные последствия наблюдаются и при изменении параметров, характеризующих уровень управления производством: при увеличении $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ кризисные явления не исчезают (рис.2), они могут даже возникнуть (рис.1), но в целом картина довольно сложная: увеличивается период колебаний, может увеличиться длительность промежутка между кризисами, иногда сокращается (но не исчезает) кризисный период, но при этом кризисные явления (падение $z$, изменение численности групп сообщества) бывают выражены еще резче.

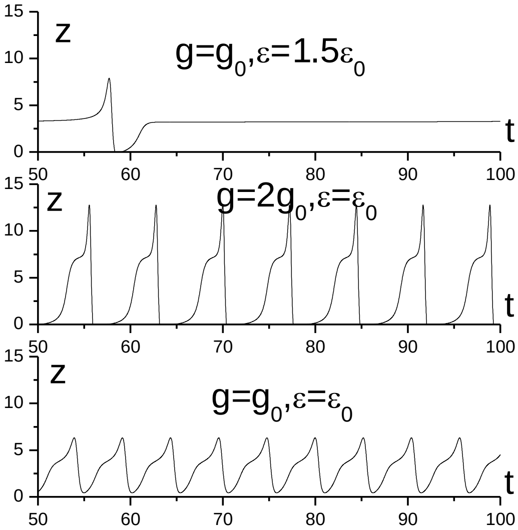


**Рис. 1.** Изменение цикла *C* с ростом *g* и ε.

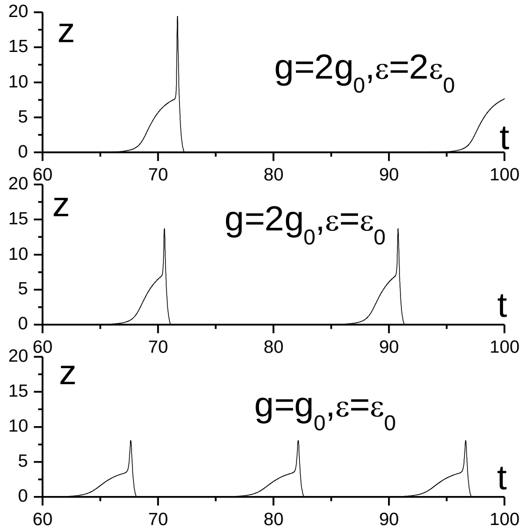


**Рис. 2.** Изменение цикла $C_z$ с ростом *g* и ε.

При сохранении всех остальных параметров и росте $g$ цикл переходит в состояние равновесия лишь в случае уменьшения $\varepsilon$, при этом чем больше $g$, тем меньше должно быть $\varepsilon$: $\varepsilon < \varepsilon^*(g)$, и при $g \to \infty$ $\varepsilon \to 0$. Итак, получается, что при $ce - lf < 0$ для перехода к стабильному сообществу надо снижать уровень управления экономикой. Но что представляет собой такое стабильное сообщество?

Для такого состояния равновесия с ростом $g$ возможны два вида изменений:

- с ростом $g$ (часто очень небольшим) состояние равновесия переходит в цикл, изменения которого с ростом $g$ описаны выше;

- при малых $\varepsilon$ состояние равновесия $(x^*, y^*, z^*)$ сохраняется, но с ростом $g$ при $bf - cm \le 0$ все координаты состояния равновесия уменьшаются (и быстрее других координат уменьшается $x^*$), а при $bf - cm > 0$ аналогично $x^* \to 0$, но $y^*$ растет, что, вероятнее всего, является следствием идеализации описываемых моделью процессов, т.к. такое явление обязательно приведет к изменению параметров модели, а, следовательно, и к изменению фазового портрета.

Из сказанного выше следует вывод: переход к стабильному (бескризисному) сообществу возможен только при изменении параметров, характеризующих отношения между группами и перераспределение произведенного продукта. В частности, исследованиями установлено (см. раздел 4), что достаточные условия возникновения и сохранения глобально устойчивого состояния равновесия (стабильное сообщество вида $(x^*, y^*, z^*)$) выражаются двумя неравенствами $bf - cm > 0$ и $ce - lf > 0$, которые могут быть записаны в виде $\frac{l}{e} < \frac{c}{f} < \frac{b}{m}$ и должны выполняться при всех $g > g^* > \frac{h}{\mu}\left(1 + \delta\frac{am + bd}{bf - cm}\right)$.

## 7. О возможности существования динамически развивающегося стабильного сообщества

$bf - cm > 0$ & $ce - lf > 0$ - это статистически достоверные достаточные условия существования огрубленного фазового портрета с единственным устойчивым состоянием равновесия $(x^*, y^*, z^*)$, все координаты которого увеличиваются с ростом $g$, но при этом наблюдаются два варианта изменения величины $\chi = \frac{z^*}{x^* + y^*}$ : постепенное увеличение или очень медленное падение. При каких условиях имеет место первый вариант изменения величины $\chi$, которая может служить некой оценкой эффективности существующего сообщества?

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим производную $\frac{\partial \chi}{\partial g} = \chi'_g$.

Координаты состояния равновесия удовлетворяют уравнениям

$\begin{cases} a - bx^* - ly^* + cz^* = 0 \\ -d - mx^* - ey^* + fz^* = 0 \end{cases}$, откуда $x^* = \frac{ae + dl}{be - lm} + \frac{ce - fl}{be - lm} z^*$ и $y^* = \frac{am + bd}{lm - be} + \frac{cm - bf}{lm - be} z^*$.

Выражение для $\chi$ принимает вид: $\chi = \dfrac{z^*}{x^* + y^*} = \dfrac{(be - lm)z^*}{a(e-m) + d(l-b) + (c(e-m) + f(b-l))z^*}$ и, следовательно, $\chi'_g = \dfrac{(be - lm)(a(e-m) + d(l-b))(z^*)'_g}{(a(e-m) + d(l-b) + (c(e-m) + f(b-l))z^*)^2}$.

При условии, что $z^*$ увеличивается с ростом $g$, т.е. $(z^*)'_g > 0$, $\chi'_g > 0$, если $(be - lm)(a(e-m) + d(l-b)) > 0$.

Из условий существования рассматриваемого сообщества, выражаемого неравенствами $\dfrac{l}{e} < \dfrac{c}{f} < \dfrac{b}{m}$, следует, что $be - lm > 0$, т.е. $\chi'_g > 0$, если $a(e-m) + d(l-b) > 0$.

Итак, условия существования глобально устойчивого, стабильного и экономически эффективного сообщества «производители – управленцы – продукт» могут быть описаны следующими неравенствами для параметров, описывающих такое сообщество:

1) $g > g^* > \dfrac{h}{\mu}\left(1 + \delta \dfrac{am + bd}{bf - cm}\right)$;
2) $bf - cm > 0$ & $ce - lf > 0$, или $\dfrac{l}{e} < \dfrac{c}{f} < \dfrac{b}{m}$;
3) $g'_t > 0$ - технический прогресс;
4) $a(e-m) + d(l-b) > 0$.

Поскольку приведенные выше выводы основаны не только на аналитических результатах, но и численных экспериментах, был проведен контрольный анализ большой статистической выборки (свыше 30000 реализаций). При выполнении условий (1-2) огрубленный фазовый портрет состоял из единственного устойчивого состояния равновесия $(x^*, y^*, z^*)$, координаты которого при выполнении условия (3) росли, а при выполнении условия (4) увеличивался и показатель $\chi = \dfrac{z^*}{x^* + y^*}$.

## 8. Качественная характеристика неравенств, выражающих условия существования глобально устойчивого, стабильного и экономически эффективного сообщества «производители – управленцы – продукт»

Рассматриваемая простая модель отражает самые важные связи и взаимодействия трех основных компонент человеческого сообщества: производители – управленцы – продукт, но для них очень сложно подобрать количественный эквивалент. Что же стоит за полученными формулами? Какие характеристики, отношения между группами отражают неравенства (1-4)?

Очевидно, неравенство (1) требует определенного уровня развития производительных сил, а неравенство (3) означает развитие сообщества в условиях технического прогресса. Неравенства (2) и (4) связывают величины, отражающие распределение продукции и конкуренцию между группами, с величинами, характеризующими отношения внутри каждой из групп. Остановимся подробнее на этих связях.

Так, из неравенства (2) следует, что ***увеличение доли произведенного продукта для одной из групп (перераспределение продукции между производителями и управленцами) должно быть либо очень незначительно, либо обязательно сопровождаться усилением конкуренции внутри этой группы или (и) уменьшением давления на другую группу***.

Рассматриваемые неравенства накладывают ограничения и на соотношения между величинами, характеризующими конкуренцию внутри группы и давление на нее, т.е между $b$ и $l$, между $e$ и $m$.

При $m \geq e$ и $b \geq l$ $(e-m) + d(l-b) \leq 0$, не выполняется неравенство (4), а при $m \geq e$ и $b < l$ не выполняется неравенство (2), т.к должно быть $l < \dfrac{be}{m} = b\dfrac{e}{m} \leq b$. Следовательно, неравенства (2,4) требуют выполнения соотношения $e > m$, когда ***конкуренция среди управленцев должна быть выше, чем давление на них со стороны производителей***.

Пусть $e > m$. Если $b \geq l$, выполнения неравенства (2) можно добиться увеличением $b(e)$ или уменьшением $l(m)$, а неравенства (4), которое можно записать в виде $\dfrac{b-l}{e-m} < \dfrac{a}{d}$, - путем увеличения $e$ или уменьшения $m$, т.е. для одновременного достижения требуемых соотношений можно увеличивать конкуренцию между управленцами. Если $b < l$, то неравенство (4) $a(e-m) + d(l-b) > 0$ выполняется, а для выполнения неравенства (2) $\dfrac{l}{e} < \dfrac{c}{f} < \dfrac{b}{m}$ можно увеличить $e$ или уменьшить $m$. К тому же при $b < l$ неравенство (2) накладывает ограничение на $l$, а именно: $l < b\dfrac{e}{m}$, т.е. $b < l < b\dfrac{e}{m}$. Из выше сказанного следует: для производителей соотношение между $b$ и $l$ может быть разным, но при этом ***давление на производителей должно быть ограничено, а увеличение давления желательно, а иногда и обязательно сопровождать увеличением конкуренции среди управленцев***.

## 9. Заключение

Говоря о возможностях исследования объектов, описываемых математическими моделями, мы оставляем в стороне вопрос об адекватности исследуемых моделей (это дело специалистов из соответствующих областей знаний). Хотя следует заметить, что наши исследования дают дополнительный материал для оценки значимости модели. Но приведенные выше результаты, с нашей точки зрения, во-первых, подтверждают широкие возможности применения новых статистических методов в исследовании математических моделей, особенно моделей с большим числом параметров, проблемы актуальной, но в общем случае практически не решаемой, и, во-вторых, результаты таких исследований, не претендуя на полноту и завершенность, позволяют выявить значимые факторы, влияющие на динамику изучаемого объекта. Сведения о сообществе, полученные в результате изучения его математической модели, - это новые знания о возможных путях развития нашего общества, это понимание происходящих в обществе процессов.

Еще раз подчеркнем, что изложенные выше результаты исследования относятся к изолированному обществу и не учитывают особенностей взаимодействия различных сообществ. Но и такие результаты дают повод к размышлениям.

## Литература


[1] Неймарк, Ю.И. Математические модели в естествознании и технике / Ю.И. Неймарк - Нижний Новгород: Изд. Нижегородского госуниверситета, 2004. – 401 с.

[2] Неймарк, Ю.И. Играет ли Бог в кости? / Ю.И. Неймарк, А.Я. Левин // Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. - Т. 17, №3. - С. 98-136.

[3] Неймарк, Ю.И. Огрубленное статистическое исследование прикладных динамических систем методами распознавания образов (часть I) / Ю.И. Неймарк, И.В. Котельников, Л.Г. Теклина // Вестник ННГУ. 2012. - №5(2). - С.159-171.

[4] Теклина, Л. Анализ и синтез динамических систем методами распознавания образов / Л. Теклина, И. Котельников - LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 129 с.

[5] Неймарк, Ю.И. Огрубленное статистическое исследование прикладных динамических систем методами распознавания образов (часть II). / Ю.И. Неймарк, И.В. Котельников, Л.Г. Теклина // Вестник ННГУ. 2012. - №6(1). - С.164-174.