О структуре ортотропного 3D-тензора проницаемости анизотропного пористого тела в задачах тепломассообмена

В.И. Ряжских[1], А.В. Николенко[1], Д.А. Коновалов[1]

[1]Воронежский государственный технический университет, Московский проспект 14, Воронеж, Россия, 394026

Аннотация. Для описания различных процессов тепломассообмена в анизотропных пористых средах предлагается структура 3D-тензора проницаемости с ортотропными свойствами. Такая структура тензора проницаемости имеет преимущества перед моноклинной и триклинной из-за минимального числа элементов, подлежащих определению, что существенно упрощает постановку, проведение и обработку соответствующих экспериментов. Кроме того, подтверждение работоспособности такой структуры открывает новые возможности при искусственном создании пористых материалов с заданными свойствами и требуемой архитектуры анизотропии на 3D-принтерах. Используя Якобианы поворотов в декартовой системе координат, найдена матрица поворотов, как результат последовательного умножения Якобианов на различные углы вокруг осей базовой системы координат. Окончательный вид тензора идентифицирован как произведение ортотропного тензора слева и справа на матрицу поворотов и транспонированную матрицу поворотов, соответственно. Такое представление позволило вычислить обратный тензор проницаемости и на примере гидродинамической фильтрации ньютоновской жидкости синтезировать математическую 3D-модель типа Дарси-Бринкмана однонаправленного течения в пористом канале прямоугольного сечения. Показано, что подобная линеаризация не нивелирует свойство анизотропности у пористой среды, сохраняя при этом трехмерность.

1. Введение

Дальнейшая интенсификация теплообмена пористыми элементами возможна с помощью специально подобранной архитектуры матрицы [1-3]. В настоящее время с помощью технологии 3D-печати [4] возможно конструирование такой архитектуры, но для этого нужна цифровая модель самой пористой матрицы [5]. Одним из способов решения такой проблемы видится в идентификации интегральных характеристик теплообмена, обеспечивающих максимальный теплопередающий эффект с помощью решения совокупной системы уравнений, состоящей из уравнений непрерывности, импульса и энергии для смешанной нестационарной конвекции для анизотропной пористой среды [6], которая в приближении гидродинамической подзадачи Дарси-Бринкмана имеет вид [7,8]:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau}+\left(\frac{\bar{v}}{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\bar{v}=\frac{\varepsilon}{\rho_f}\cdot\left[-\nabla p+\frac{\mu_f}{\varepsilon}\nabla^2\bar{v}-\frac{\mu_f}{\bar{\bar{K}}}\bar{v}\right], \tag{2}$$

где τ – время; $\bar{v}$ – вектор скорости сатурированного ньютоновского теплоносителя; ρ_f,μ_f – плотность и динамическая вязкость жидкой фазы, ε – пористость; p – давление; $\bar{\bar{K}}$ – тензоры проницаемости.

2. Описание метода

Как правило, структура тензорных параметров выбирается ортотропной [9,10] с целью упрощенного определения их компонентов из экспериментов, что соответствует диагональному их виду [11]. Якобианы вращения декартовой системы координат вокруг осей ox, oy, oz на углы α,β,γ таковы:

$$J(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix};\quad J(\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix};\quad J(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

откуда матрица вращения есть

$$A=J(\alpha)J(\beta)J(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}.$$

Пусть структура тензора проницаемости в базовой системе координат представлена следующим образом

$$\bar{\bar{K}}_0=\begin{bmatrix}K_1 & 0 & 0\\ 0 & K_2 & 0\\ 0 & 0 & K_3\end{bmatrix},$$

или в инвариантной форме записи

$$\bar{\bar{K}}=A\times\bar{\bar{K}}_0\times A^T,$$

где $K_{11}=\cos^2\beta\cos^2\gamma K_1+\cos^2\beta\sin^2\gamma K_2+\sin^2\beta K_3$;

$$K_{12}=K_{21}=\cos\beta\cos\gamma\left(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma\right)K_1-\cos\beta\sin\gamma\left(-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma\right)K_2-$$
$$-\sin\beta\cos\alpha\cos\beta K_3;$$

$$K_{13}=K_{31}=\cos\beta\cos\gamma\left(-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\right)K_1-\cos\beta\sin\gamma\left(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma\right)K_2+$$
$$+\sin\beta\cos\alpha\cos\beta K_3;$$

$$K_{22}=\left(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma\right)^2K_1+\left(-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma\right)^2K_2+\sin^2\alpha\cos^2\beta K_3;$$

$$K_{23}=K_{32}=\left(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma\right)^2\left(-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\right)K_1+$$
$$+\left(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma\right)\left(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma\right)K_2-\sin\alpha\cos^2\beta\cos\alpha K_3;$$

$$K_{33}=\left(-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\right)^2K_1+\left(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma\right)^2K_2+\cos^2\alpha\cos^2\beta K_3.$$

Показано, что альтернативой системе (1), (2) является система

$$\nabla\cdot\bar{v}=0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau}+\left(\frac{\bar{v}}{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\bar{v}=\frac{\varepsilon}{\rho_f}\cdot\left[-\nabla p+\frac{\mu_f}{\varepsilon}\nabla^2\bar{v}-\mu_f\bar{\bar{K}}^{-1}\bar{v}\right], \tag{4}$$

где $\bar{\bar{K}}^{-1}$ – обратный тензор проницаемости.

Если в декартовой системе координат рассмотреть однонаправленное течение ньютоновской жидкости вдоль аксиальной координаты y, то из (3), (4) следует линеаризованная формулировка гидродинамической подзадачи:

$$\bar{v}\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\varepsilon}{\rho_f}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_f}{\rho_f}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) - \frac{\varepsilon\mu_f}{\rho_f}K^*_{22}v_y; \tag{5}$$

$$v_y(x,0,z) = \bar{v}; \tag{6}$$

$$v_y(x,y,0) = v_y(x,y,h_z) = v_y(0,y,z) = v_y(h_x,y,z) = 0, \tag{7}$$

где $\bar{v}$ – среднеинтегральная скорость жидкой среды в прямоугольном пористом канале; v_y – аксиальная составляющая вектора скорости течения теплоносителя; h_z, h_x – высота и ширина прямоугольного поперечного сечения пористого канала;

$$K^*_{22} = -\Big[\big(\cos^2\gamma\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos^2\gamma\cos^2\alpha - \cos^2\gamma\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta -$$
$$-1 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha\sin\gamma\big)K_1K_2 + \big(\cos^2\gamma\cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma + 2\cos^2\gamma\cos^2\alpha -$$
$$-\cos^2\gamma\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha\sin\gamma\big)K_2K_3 + \big(-\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta\big)K_1K_2\Big]\cdot\frac{1}{K_1K_2K_3}.$$

3. Заключение

Полученный результат показывает, что, несмотря на линеаризацию исходной системы, зависимость поля скоростей от трехмерной архитектуры пористой среды остается.

4. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-90114 и при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 20-19-00203.

5. Литература

[1] Bejan, A. Convection heat transfer – NY: John Wiley & Sous. Inc., 2004. – 673 p.
[2] Vafai, K. Handbook of porous media – NY: CRC Press, 2015. – 959 p.
[3] Mujeebu, M.A. Applications of porous media combustion technology – A review / M.A. Mujeebu, M.Z. Abdullah, M.Z. Abu Bakar, A.A. Mohamed, M.K. Abdullah // Applied Energy. – 2009. – Vol. 86(10). – P. 1365-1375.
[4] Ying, J. Anisotropic porous structure modeling for 3D printed objects / J. Ying, L. Lu, L. Tian, X. Yan, B. Chen // Computer & Graphics. – 2018. – Vol. 70(2). – P. 157-164.
[5] Xiao, F. Geometry models media based on Vorono; tessellations and their porosity-permeability relations / F. Xiao, X. Yin // Computer & Mathematics with Applications. – 2016. – Vol. 72(2). – P. 328-348.
[6] Zhu, Q.Y. Three-dimensional numerical investigation on thermosolutal convection of power – low fluids in anisotropic porous media / Q.Y. Zhu, Y.J. Zhuang, H.Z. Yu // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 2017. – Vol. 104. – P. 897-917.
[7] Safi, S. Heat and mass transfer in anisotropic porous media / S. Safi, S. Benissaad // Adv. Theor. Appl. Mech. – 2012. – Vol. 5(1). – P. 11-22.
[8] Aboubi, K. Natural convection in horizontal annulus filled with an anisotropic porous medium / K. Aboubi, L. Robillard, P. Vasseur // Int. J. of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. – 1998. – Vol. 8(6). – P. 689-702.
[9] Soltani, H. Analytical solution of forced convective heat transfer in a horizontal anisotropic porous media cylinder: effect of variations of frictional heating and heat generation on the temperature profile and Nusselt number / H. Soltani, H. Ajamin // Chen. Biochen. Eng. Q. – 2014. – Vol. 28(3). – P. 301-318.
[10] Latif, M.J. Heat convection – NY: Springer, 2006. – 434 p.
[11] Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Наука, 1987. – 248 с.

On the structure of the orthotropic 3D permeability tensor of an anisotropic porous body in heat and mass transfer problems

V.I. Ryazhskikh[1], A.V. Nikolenko[1], D.A. Konovalov[1]

[1]Voronezh State Technical University, Moskovsky prospect 14, Voronezh, Russia, 394026

Abstract. The structure of a 3D permeability tensor with orthotropic properties is proposed to describe various heat and mass transfer processes in anisotropic porous media. This structure of the permeability tensor has advantages over the monoclinic and triclinic because of the minimum number of elements to be determined, which greatly simplifies the formulation, conduct and processing of the corresponding experiments. In addition, the confirmation of the operability of such a structure opens up new opportunities for the artificial creation of porous materials with specified properties and the required anisotropy architecture on 3D printers. Using the Jacobians of rotations in the Cartesian reference system, the matrix of rotations is found as a result of successive multiplication of Jacobians by different angles around the axes of the base coordinate system. The final form of the tensor is identified as the product of the orthotropic tensor on the left and right by the turn matrix and the transposed turn matrix, respectively. This representation allowed us to calculate the inverse permeability tensor and synthesize a mathematical 3D model of Darcy-Brinkman type of unidirectional flow in a porous channel of rectangular cross-section on the example of hydrodynamic filtration of a Newtonian fluid. It is shown that such linearization does not level the property of anisotropy in a porous medium, while maintaining three-dimensionality.