

# О статическом решении контактного взаимодействия гибкой прямоугольной в плане микрооболочки с прямоугольной в плане микропластинкой

И.В. Папкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, Политехническая 77, Саратов, Россия, 410054

**Аннотация.** Построена математическая модель контактного взаимодействия гибкой прямоугольной пластины и гибкой сферической прямоугольной в плане полой оболочкой. Материал оболочки и пластины является упругим изотропным и однородным. Используются гипотезы Кирхгофа. Система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных выводится из принципа энергии Гамильтона на основе модифицированной моментной теории упругости. Функция контактного давления определялась по теории Б.Я. Кантор. Исследовано контактное взаимодействие чувствительных элементов микромеханических датчиков инерциальной информации в виде микрооболочки и микропластинки. Микрооболочка находится под действием статической, равномерно распределенной нагрузки. Статическое решение определяется методом установления. Получено новое явление, связанное с потерей устойчивости.

## 1. Постановка задачи

В работе построена математическая модель колебаний механической системы в виде тонких прямоугольных в плане полой оболочкой и микропластинки из изотропного упругого материала (Рисунок 1) с учетом их контактного взаимодействия. При этом полагается, что к срединным поверхностям оболочки и пластинки привязана своя система координат, а связаны они только через контакт.

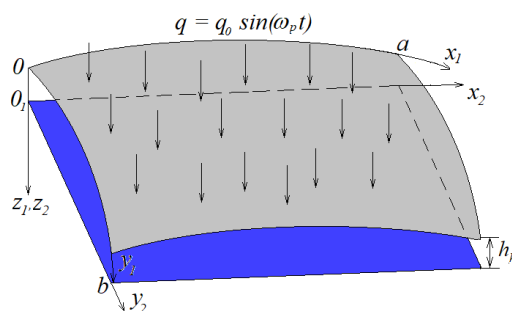


Рисунок 1. Расчетная схема.

Из вариационного принципа Гамильтона на основе с учетом модифицированной моментной теории получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно  $w_1$  и  $F_1$ ,

граничные и начальные условия. Контактное взаимодействие между пластинкой и оболочкой учтено по теории Кантора [1]:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{E_1 h_1^3 (1 - \nu_1)}{12(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)} + \frac{l_1^2 E_1 h_1}{2(1 + \nu_1)} \right) \nabla^4 w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1 \partial y_1} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial y_1} + \\ & + k_{x_1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} + k_{y_1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + q_1 - K \frac{E_1}{h_1} (w_1 - h_k - w_2) \psi - \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t} - \rho_1 h_1 \varepsilon_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ & \frac{1}{E_1} \nabla^4 F_1 = - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} + \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1 \partial y_1} \right)^2 - k_{x_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} - k_{y_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \quad (1) \\ & \left( \frac{E_2 h_2^3 (1 - \nu_2)}{12(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)} + \frac{l_2^2 E_2 h_2}{2(1 + \nu_2)} \right) \nabla^4 w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} \cdot \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2 \partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial y_2} + \\ & + q_2 + K \frac{E_1}{h_1} (w_1 - h_k - w_2) \psi - \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t} - \rho_2 h_2 \varepsilon_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \\ & \frac{1}{E_2} \nabla^4 F_2 = - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} + \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2 \partial y_2} \right)^2 \end{aligned}$$

$\rho_1, \rho_2$  – плотность материала,  $t$  – время,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – коэффициент затухания среды,  $h_k = h_k(x_i, y_i)$  – зазор между оболочкой и пластинкой,  $w_i$  – прогиб оболочки ( $i = 1$ ) и пластинки ( $i = 2$ );  $F_i$  – функция усилий;  $t$  – время;  $q_i$  – внешнее давление;  $\varepsilon$  – коэффициент демпфирования среды,  $k_{x_1}, k_{y_1}$  – параметры кривизны оболочки,  $a, b$  – размеры оболочки в плане по  $x_i$  и по  $y_i$  соответственно;  $E_i$  – модуль упругости,  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона. Здесь  $K$  – коэффициент пропорциональности между контактным давлением и обжатием. Функция  $\psi$  определяет размеры зоны контакта и находится по правилу  $\psi = [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)]/2$ . Параметр  $l$  – это дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с симметричным тензором градиента вращения.

К уравнениям (1) присоединим некоторые граничные условия для оболочки и пластинки: опирание на гибкие несжимаемые (нерастяжимые) в касательной плоскости ребра пластинки:

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} = 0; \quad F_1 = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} = 0; \quad w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} = 0; \quad F_2 = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a, \quad x_2 = 0; a \\ w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} = 0; \quad F_1 = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} = 0; \quad w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} = 0; \quad F_2 = \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} = 0 \quad \text{при } y_1 = 0; b, \quad y_2 = 0; b \end{aligned}$$

И начальные условия:

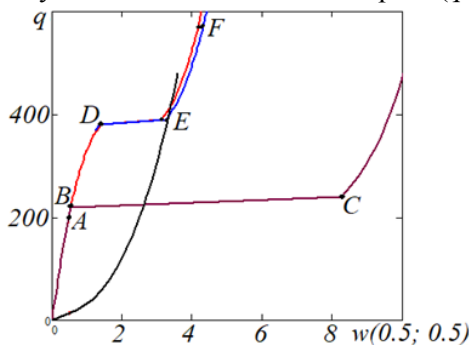
$$w_1(x_1, y_1) = 0; \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = 0; \quad w_2(x_2, y_2) = 0; \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводится к задаче Коши методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка. Задача Коши решается методом Ньюмарка. На каждом шаге по времени решается обширная система нелинейных алгебраических уравнений.

## 2. Численный эксперимент

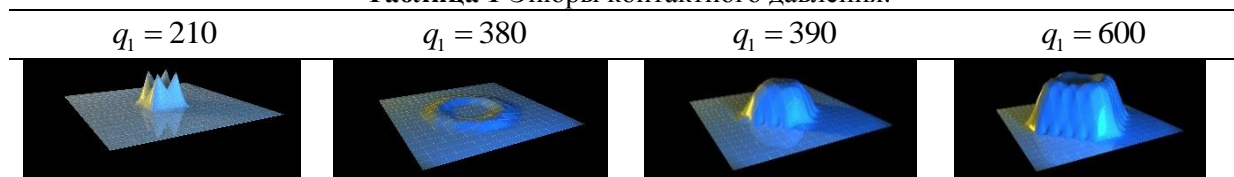
Рассмотрим структуру, состоящую из квадратной микрооболочки и квадратной микропластинки. Материал – алюминий. Пластинка расположена под оболочкой на расстоянии  $h_k = 0.5h$ . На оболочку действует статическая поперечная равномерно распределенная нагрузка. На рисунке 2 представлены графики зависимости прогиба от нагрузки. Решение получено методом установления, идея которого принадлежит А.Н. Тихонову. На графике

отмечены точки: А – контакт оболочки и пластинки ( $q_1 = 210$ ), В – докритическая нагрузка оболочки, в том случае, если нет контакта с пластинкой ( $q_1 = 230$ ), С – критическая нагрузка оболочки (задача без контакта  $q_1 = 240$ ), D - докритическая нагрузка при контактном взаимодействии оболочки и пластинки  $q_1 = 380$ , E - критическая нагрузка при контактном взаимодействии оболочки и пластинки  $q_1 = 390$ , F - закритическая нагрузка при контактном взаимодействии оболочки и пластинки  $q_1 = 600$ . Как показывает численный эксперимент, потеря устойчивости («хлопок») у оболочки (без контакта с пластинкой) происходит при нагрузке  $q_1 = 230$  и прогибы становятся больше  $8h$ . С учетом контактного взаимодействия несущая способность оболочки увеличивается почти в два раза ( $q_1 = 390$ ).



**Рисунок 2.** Зависимость прогиба пластинки и оболочки от нагрузки (черный цвет – пластинка без контакта, фиолетовый цвет – оболочка без контакта, красный цвет – оболочка контактирует с пластинкой, синий цвет – пластинка контактирует с оболочкой).

**Таблица 1** Эпюры контактного давления.



Рассмотрим эпюры контактного давления (Таблица 1). При нагрузке  $q_1 = 180$  контакт еще не произошел, прогиб оболочки меньше  $0.5h$ . При контакте зона контактного взаимодействия оболочки и пластинки расположена вокруг центральной точки и имеет форму кольца, в центре при  $x = 0.5$ ,  $y = 0.5$  контакта нет. С увеличением нагрузки кольцо увеличивается. При «хлопке»  $q_1 = 390$  форма контактного давления становится в виде квадрата.

### 3. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-19-00215).

### 4. Литература

- [1] Кантор, Б.Я. Метод решения контактных задач нелинейной теории оболочек / Б.Я. Кантор, Т.Л. Богатыренко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – Т. 1. – С. 18-21.

## On a static solution to the contact interaction of a flexible rectangular in plane of a microshell with a rectangular in plane of microplate

I.V. Papkova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Politechnicheskaya street 77, Saratov, Russia, 410054

**Abstract.** The mathematical model of the contact interaction of a flexible rectangular in plane of a spherical microshell and a flexible rectangular microplate is constructed. The material of the shell and plate is elastic isotropic and homogeneous. Kirchhoff hypotheses are taken into account. A system of nonlinear partial differential equations is derived from the Hamiltonian energy principle on the basis of a modified couple stress theory. The contact pressure function was determined according to the theory of B.Ya. Cantor. Contact interaction of sensitive elements of micromechanical sensors of inertial information in the form of a micro-shell and micro-plate is investigated. A micro-shell is affected by a static, uniformly distributed load. The static solution is determined by the establishment method. A new phenomenon related to the loss of stability is obtained.