

О стабилизируемости многообразия состояний равновесия в модели распространения мутирующих вирусов

Ю.Г. Ермошкина

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

Аннотация

В работе рассматривается система полулинейных параболических уравнений с многообразием состояний равновесия. Получены условия стабилизируемости этого многообразия.

Ключевые слова: бифуркация; параболические уравнения; многообразие стационарных состояний; модель взаимодействия вирусов.

1. Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= A(a, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= By + Y(a, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= Cz + Z(a, y, z),\end{aligned}\tag{1}$$

где $a, A \in R^l$; $y, Y \in R^k$; $z, Z \in R^m$. Будем считать, что $A(a, 0, 0) \equiv 0, Y(a, 0, 0) \equiv 0, Z(a, 0, 0) \equiv 0$. Тогда система (1) имеет многообразие состояний равновесия $\mathfrak{M} = \{(a, 0) | a \in R^l, 0 \in R^k \times R^m\}$.

Следуя [1, 2], будем говорить, что многообразие \mathfrak{M} устойчиво по отношению к переменным $x = (y, z)$, если для любой точки $a \in R^l$ и любой окрестности нуля W фазового пространства $R^k \times R^m$ можно указать такую окрестность нуля $W_0 \subset R^k \times R^m$, что для любой точки $x_0 = (y_0, z_0) \in W$ соответствующее решение $a = a(t, a_0, x_0)$, $x = x(t, a_0, x_0)$ ($a(0, a_0, x_0) = a_0$, $x(0, a_0, x_0) = x_0$) удовлетворяет соотношению $x = x(t, a_0, x_0) \in W$ при $t \geq 0$.

Будем говорить, что \mathfrak{M} асимптотически устойчиво по отношению к переменным $x = (y, z)$, если оно устойчиво по отношению к переменным x и, кроме этого, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a_0, x_0) = 0$ для всех $x_0 \in W$.

Будем говорить, что \mathfrak{M} стабилизируемо, если оно асимптотически устойчиво по отношению к переменным x и при $t \rightarrow \infty$ $\{a(t, a_0, x_0), x(t, a_0, x_0)\}$ стремится к некоторой точке многообразия \mathfrak{M} , если $x_0 \in W_0$.

М.А. Айзерман и Ф.Р. Гантмахер установили, что состояние равновесия неавтономной системы является устойчивым, если все корни характеристического уравнения, кроме нулевых корней, число которых равно числу уравнений неавтономных связей, имеют отрицательные действительные части [3, 4]. Всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при $t \rightarrow \infty$ к одному из возможных установившихся движений, принадлежащих указанному многообразию. [5]

Рассмотрим модель взаимодействия двух популяций микроорганизмов в одномерном случае. Данная система основана на уравнениях Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова. Рассмотрим задачу на промежутке $x \in [0; 1]$. Система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_1 u(x,t)(1 - q_1 v(x,t))(1 - u(x,t) - v(x,t)); \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + a_2 v(x,t)(1 - q_2 u(x,t))(1 - u(x,t) - v(x,t)), \end{cases}\tag{2}$$

где a_1, a_2 - коэффициенты воспроизводства для популяций u и v , соответственно, D_1, D_2 - коэффициенты диффузии, q_1, q_2 - коэффициенты взаимодействия особей разных популяций.

В качестве граничных условий в данной задаче рассматриваются условия непроницаемости на концах рассматриваемого промежутка. Они имеют вид:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \\ \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0.\end{aligned}\tag{3}$$

В качестве начальных условий выбраны непрерывные функции, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \begin{cases} 0,9(-5(x-1)^2 + 1), & u > 0, \\ 0, & u \leq 0; \end{cases} \\ v(x, 0) &= \begin{cases} 0,9(-5x^2 + 1), & v > 0, \\ 0, & v \leq 0. \end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$

2. Численное моделирование

Для решения задачи (2)-(4) составим явную конечно-разностную схему. Для этого заменим дифференциальные операторы их сеточными аналогами. Получим:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau} = D_1 \frac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{\tau} + a_1 u_i^k (1 - q_1 v_i^k)(1 - u_i^k - v_i^k); \\ \frac{v_i^{k+1}-v_i^k}{\tau} = D_2 \frac{v_{i+1}^k-2v_i^k+v_{i-1}^k}{\tau} + a_2 v_i^k (1 - q_2 u_i^k)(1 - u_i^k - v_i^k). \end{cases} \quad (5)$$

Граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} \frac{u_1^{k+1}-u_{-1}^{k+1}}{h} = 0; \\ \frac{v_1^{k+1}-v_{-1}^{k+1}}{h} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Определим начальные условия следующим образом:

$$\begin{cases} u_i^0 = \begin{cases} 0,9(-5(x_i - 1)^2 + 1), u_i^0 > 0, \\ 0, u_i^0 \leq 0; \end{cases} \\ v_i^0 = \begin{cases} 0,9(-5x^2 + 1), v_i^0 > 0, \\ 0, v_i^0 \leq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

Их графики представлены на рис.1.

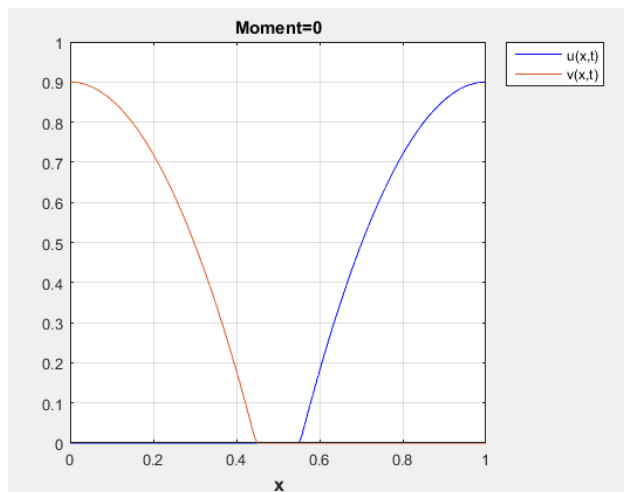


Рис. 1. График начальных условий для u и v .

Для решения задачи (5)-(7) была реализована программа в среде Matlab, рассчитывающая значения сеточных функций на временном промежутке $0 \leq t \leq 600$.

3. Различные случаи

Рассмотрим случай, когда коэффициенты первого и второго уравнения равны, т. е. $a_1 = a_2 = 1$, $D_1 = D_2 = 0.001$, $q_1 = q_2$. Разделяя переменные и решая задачу на собственные числа, найдем значение параметров $q_1 = q_2 = 2$, при переходе через которое в системе происходит бифуркация. Для иллюстрации данного явления рассмотрим три различных случая:

1. $q_1 = q_2 < 2$
2. $q_1 = q_2 \approx 2$
3. $q_1 = q_2 > 2$

В первом случае траектории системы стремятся к положению равновесия $(0,5;0,5)$, принадлежащему многообразию состояний равновесия системы. По теореме Айзермана-Гантмахера, состояние равновесия системы является устойчивым. Таким образом, многообразие стабилизируемо. Во втором случае, при переходе через критическое значение происходит мягкая потеря устойчивости системы, а в третьем случае можно наблюдать полную потерю устойчивости.

3.1. Случай, когда $q_1 = q_2 < 2$.

Для случая 1, когда $q_1 = q_2 = 1.5$, динамика функции $u(x,t)$ представлена на рисунке 2. Динамика для функции $v(x,t)$ представлена на рисунке 3. На рисунке 4 представлено решение в конечный момент времени $t=600$.

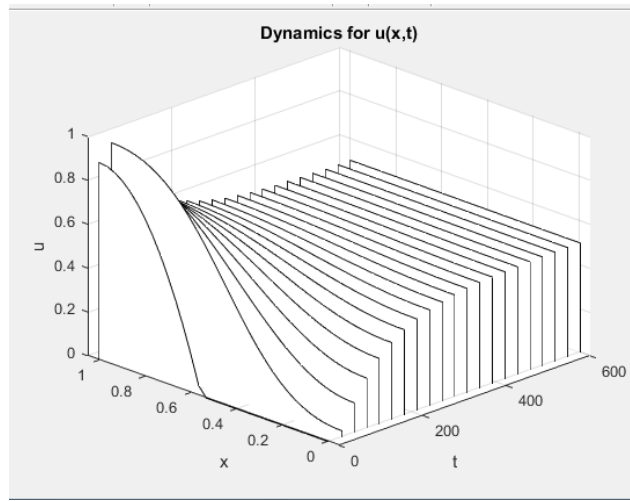


Рис. 2. Динамика функции $u(x, t)$ для случая 1.

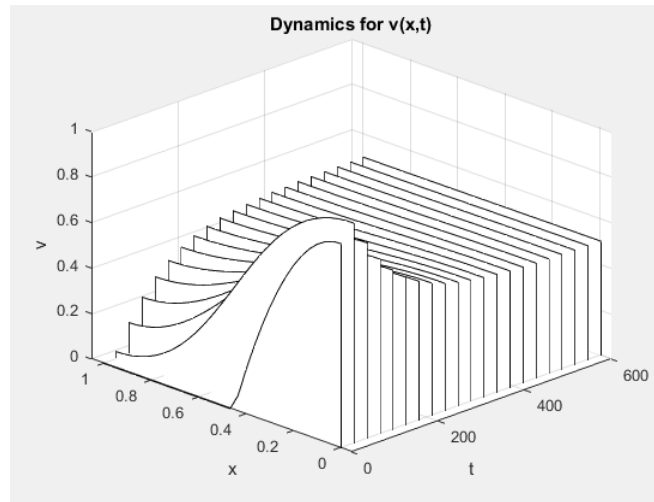


Рис. 3. Динамика функции $v(x, t)$ для случая 1.

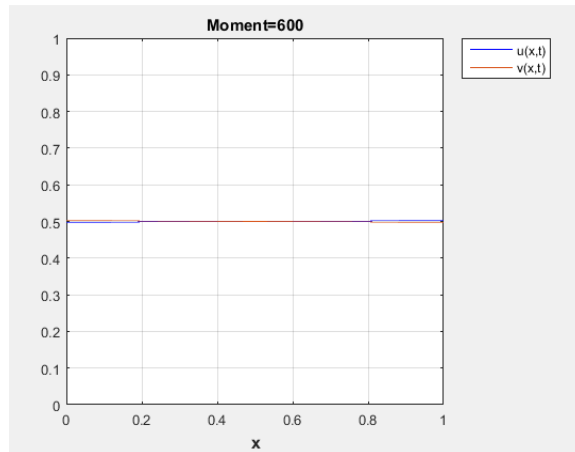


Рис. 4. Решение в конечный момент времени $t=600$ для случая 1.

3.2. Случай, когда $q_1 = q_2 \approx 2$.

Для случая 2, когда $q_1 = q_2 = 2.05$, динамика функции $u(x, t)$ представлена на рисунке 5. Динамика для функции $v(x, t)$ представлена на рисунке 6. На рисунке 7 представлено решение в конечный момент времени $t=600$.

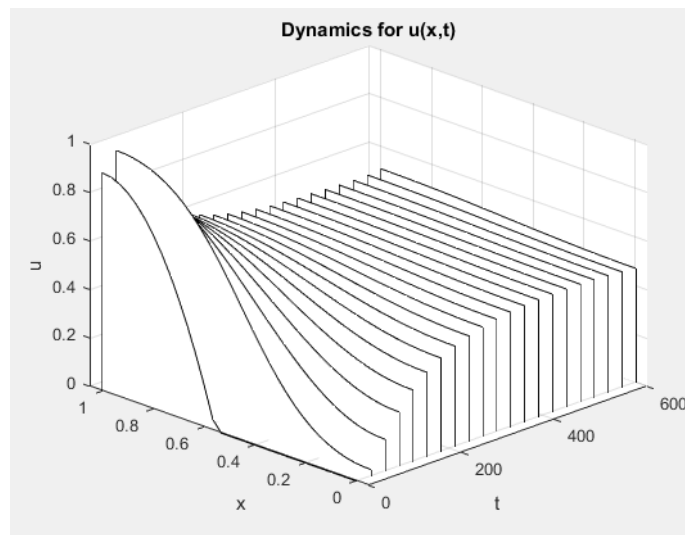


Рис. 5. Динамика функции $u(x, t)$ для случая 2.

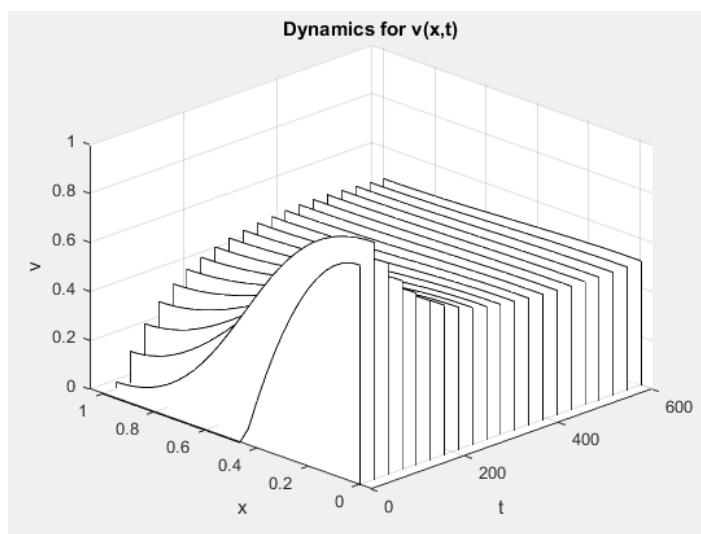


Рис. 6. Динамика функции $v(x, t)$ для случая 2.

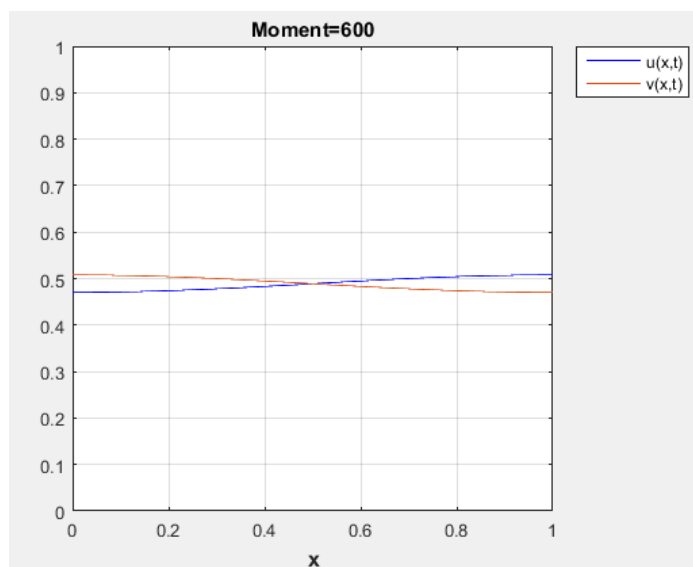


Рис. 7. Решение в конечный момент времени $t=600$ для случая 2.

3.3. Случай, когда $q_1=q_2>2$.

Для случая 3, когда $q_1 = q_2 = 2.5$, динамика функции $u(x, t)$ представлена на рисунке 8. Динамика для функции $v(x, t)$ представлена на рисунке 9. На рисунке 10 представлено решение в конечный момент времени $t=600$.

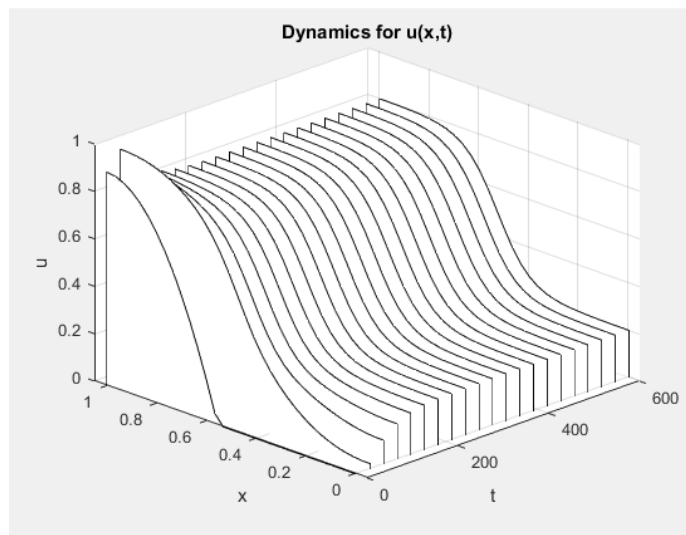


Рис. 8. Динамика функции $u(x, t)$ для случая 3.

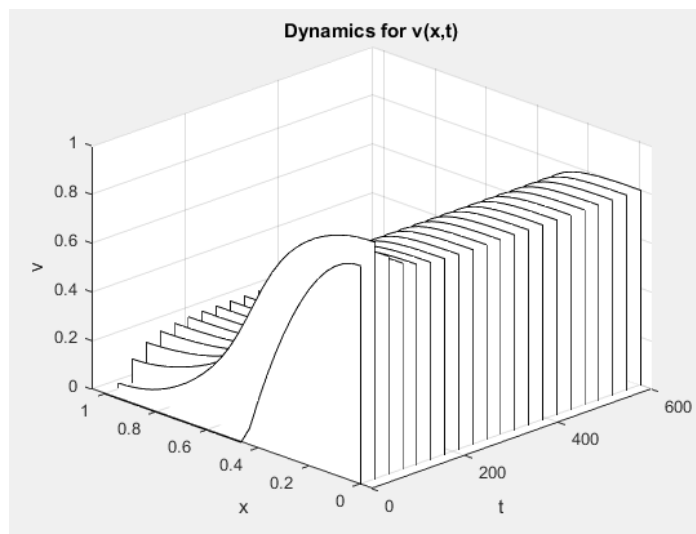


Рис. 9. Динамика функции $v(x, t)$ для случая 3.

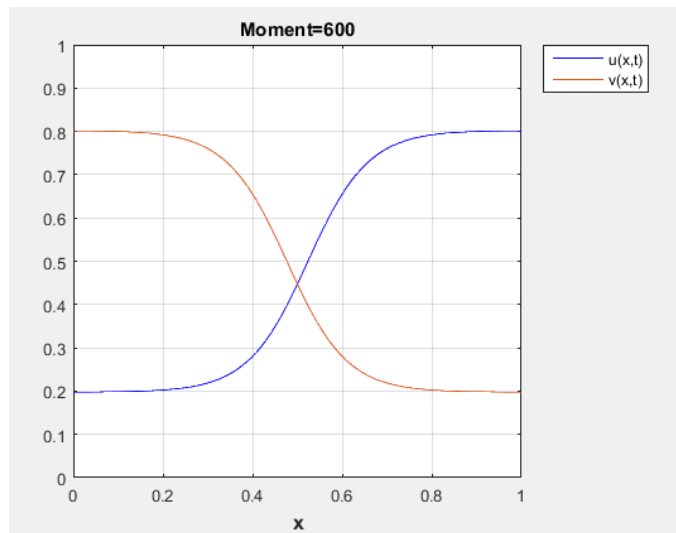


Рис. 10. Решение в конечный момент времени $t=600$ для случая 3.

4. Заключение

Таким образом, показано, что при $q_1 = q_2 < 2$ многообразие состояний равновесия системы стабилизируется, а при переходе через значение коэффициента взаимодействия $q_1 = q_2 = 2$ в системе происходит потеря устойчивости.

Благодарность

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта № 16-41-630529.

Литература

- [1] Стрыгин, В.В. Разделение движений методом интегральных многообразий / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
- [2] Strygin, V.V. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of satellites with double spin / V.V. Strygin, V.A. Sobolev // *Cosmic Research* – 1976. – Vol. 14. – P. 331-335.
- [3] Айзерман, М. А. Stabilität der Gleichgewichtslage im einem nicht-holonomen System / М. А. Айзерман, Ф.Р. Гантмахер // *Z. angew. Math, und Mech.* – 1957. – В. 37, Nr. 1/2. – P. 74-75.
- [4] Неймарк, Ю.И. Динамика неголономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 520 с.
- [5] Калёнова, В.И. Неголономные механические системы и стабилизация движения / В.И. Калёнова, А.В. Карапетян, В.М. Морозов, М.А. Салмина // *Фундаментальная и прикладная математика.* – 2005. – Т. 11, № 7. – С. 117-158.
- [6] Murray, J. D. Lectures on Nonlinear Differential-Equation Models in Biology / J. D. Murray – Clarendon Press, Oxford, 1977. – 379 p.
- [7] Murray, J.D. Mathematical Biology I. An Introduction / J. D. Murray – Springer, New York, 2001. – 576 p.
- [8] Фомин, С.В. Математические проблемы биологии / С.В. Фомин. – М.:Наука, 1973. – 200 с.
- [9] Базыкин, А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 367 с.
- [10] Шмидт, А.В. Точные решения систем уравнений типа «реакция-диффузия» / А.В. Шмидт // *Вычислительные технологии.* – 1998. – Т. 3, №4. – С. 87-94.
- [11] Шмидт, А.В. Анализ систем реакция-диффузия / А.В. Шмидт // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2007. – Т. 47, №2. – С. 256-268.
- [12] Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 368 с.