О собственных модах регулярной волноведущей структуры на основе градиентного бианизотропного метаматериала

А.И. Киреева[1]**, И.П. Руденок**[2]

[1]Волгоградский государственный медицинский университет, пл. Павших Борцов 1, Волгоград, Россия, 400131
[2]Волгоградский государственный технический университет, пр. им. Ленина 28, Волгоград, Россия, 400005

Аннотация. Рассмотрено распространение поверхностных и псевдоповерхностных волн смешанного спектра в симметричной нанокристаллической плёночной структуре с непрерывно неоднородными характеристиками волноведущей среды. Подложка и покрытие композиционной структуры имели одинаковую скалярную диэлектрическую и магнитную проницаемости. Искусственная среда волноводного слоя была изготовлена из бианизотропного материала с анизотропией магнитодиэлектрической связи, характеризующейся четырьмя тензорами диэлектрической, магнитной и магнитоэлектрической проницаемостей с ненулевыми диагональными элементами. Они зависели от пространственных координат по биквадратичным законам. Из уравнений Максвелла была получена система связанных квазидифференциальных волновых уравнений с учетом указанных материальных соотношений. Она имеет линейно независимые решения, которые были представлены в виде обобщенных рядов. Для определения их особенностей составлены рекуррентные соотношения. С учетом непрерывности касательных компонент электрического и магнитного полей найдено дисперсионное уравнение для расчета поперечных волновых чисел. Сделан вывод о существовании четырех собственных поверхностных и псевдоповерхностных волн с различными поляризациями.

1. Введение

Исследование распространения электромагнитных волн в непрерывно неоднородных (градиентных) бианизотропных структурах представляет особый интерес из-за возможностей выявления особенностей смещения спектров гибридных мод, их взаимных связей. Это обусловлено изменением параметров градиентности элементов четырёх тензоров диэлектрической $\vec{\varepsilon}$, магнитной $\vec{\mu}$ и магнитоэлектрических проницаемостей $\vec{\alpha}$ и $\vec{\nu}$:

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon}(x)\vec{E} + \vec{\alpha}(x)\vec{H}, \; B = \vec{\mu}(x)\vec{H} + \vec{\nu}(x)\vec{E}, \qquad (1)$$

Здесь материальные характеристики метаматериала определяются тридцатью шестью элементами, каждый из которых имеет свой профиль пространственного распределения. Вид градиентных тензоров (форма зависимости от поперечных или продольных координат) определяется взаимной диффузией компонент метаматериала волноведущего слоя, симметрией его кристаллической решётки, непрерывным изменением направления вектора поляризации или магнитного момента, механическими напряжениями, сопутствующими выращиванию кристалла и т.д.[1].

Аналитические решения уравнений Максвелла в известных функциях для обобщённых градиентных бианизотропных сред указанного вида (1) представляет большие математические трудности и в настоящее время отсутствует. Здесь мы рассмотрим один из методов нахождения моделей, с помощью которых можно задавать свойства реальных метаматериалов. Метод основан на анализе волновых уравнений с диагональными градиентными тензорами бианизотропной среды[2,3]. Он позволяет отыскать достаточно общие аналитические решения, так как большинство известных в литературе моделей метаструктур представляют собой частные случаи полученных в этой работе результатов. Точные аналитические решения имеют особую значимость в математической теории волн в сложных структурах, но они не охватывают большого разнообразия реальных практических приложений. Из-за этого точные методы приходится дополнять приближенными, которые основываются на теории возмущений, вариационных методах, и прямыми численными расчётами.

2. Постановка задачи

В работе рассмотрено распространение электромагнитных волн в волноведущей структуре, которая состоит из плёнки из метаматериала, подложки и покрытия. Покрытие и подложка имеют скалярные материальные характеристики диэлектрической и магнитной проницаемостей соответственно $\varepsilon_1, \mu_1; \varepsilon_3, \mu_3$. Волноведущий слой характкризуется градиентными тензорами диэлетрической, магнитной проницаемостей $\vec{\vec{\varepsilon}}_2$, $\vec{\vec{\mu}}_2$ и магнитоэлектрических проницаемостей $\vec{\vec{\alpha}}_2$ и $\vec{\vec{\nu}}_2$:

$$\vec{\vec{\varepsilon}}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(q_0, q_1, ..., q_n, x) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}(g_0, g_1, ..., g_n, x) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(a_0, a_1, ..., a_n, x) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\vec{\vec{\mu}}_2 = \begin{bmatrix} \mu_{xx}(b_0, b_1, ..., b_n, x) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy}(c_0, c_1, ..., c_n, x) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz}(d_0, d_1, ..., d_n, x) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\vec{\vec{\alpha}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{xx}(e_0, e_1, ..., e_n, x) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy}(h_0, h_1, ..., h_n, x) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zz}(f_0, f_1, ..., f_n, x) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\vec{\vec{\nu}}_2 = \begin{bmatrix} \nu_{xx}(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_n, x) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{yy}(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, x) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{zz}(\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n, x) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

В пределах волноведущей плёнки уравнения Максвелла можно записать:

$$\beta H_y = j\omega\varepsilon_{xx}(q_0, q_1, ..., q_n, x)\mathrm{E}_x + \alpha_{xx}(e_0, e_1, ..., e_n, x)H_x, \tag{6}$$

$$-j\gamma H_x - \frac{dH_z}{dx} = j\omega\varepsilon_{yy}(g_0, g_1, ..., g_n, x)\mathrm{E}_y + j\omega\alpha_{yy}(h_0, h_1, ..., h_n, x)H_y, \tag{7}$$

$$\frac{dH_y}{dx} = j\omega\varepsilon_{zz}(a_0, a_1, ..., a_n, x)\mathrm{E}_z + j\omega\alpha_{zz}(f_0, f_1, ..., f_n, x)H_z, \tag{8}$$

$$\gamma\mathrm{E}_y = -j\omega\mu_{xx}(b_0, b_1, ..., b_n, x)H_x - j\omega\nu_{xx}(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_n, x)E_x, \tag{9}$$

$$j\gamma\mathrm{E}_x + \frac{d\mathrm{E}_z}{dx} = j\omega\cdot\mu_{yy}(c_0, c_1, ..., c_n, x)H_y + j\omega\nu_{yy}(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, x)E_y, \tag{10}$$

$$\frac{d\mathrm{E}_y}{dx} = -j\omega\mu_{zz}(d_0, d_1, ..., d_n, x)H_z - j\omega\nu_{zz}(\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n, x)E_z. \tag{11}$$

3. Основные уравнения

С учётом уравнений (6) – (9) находим связь между поперечными и продольными составляющими электрического и магнитного поля

$$\mathrm{E}_x = \frac{\gamma\left[\mu_{xx}(b_0, b_1, ..., b_n, x)H_y + \alpha_{xx}(e_0, e_1, ..., e_n, x)E_y\right]}{j\omega[\varepsilon_{xx}(q_0, q_1, ..., q_n, x)\mu_{xx}(b_0, b_1, ..., b_n, x) - \nu_{xx}(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_n, x)\alpha_{xx}(e_0, e_1, ..., e_n, x)]}, \tag{12}$$

$$H_x = -\frac{\gamma\left[\varepsilon_{xx}(q_0, q_1, ..., q_n, x)E_y + \nu_{xx}(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_n, x)H_y\right]}{j\omega[\varepsilon_{xx}(q_0, q_1, ..., q_n, x)\mu_{xx}(b_0, b_1, ..., b_n, x) - \nu_{xx}(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_n, x)\alpha_{xx}(e_0, e_1, ..., e_n, x)]}, \tag{13}$$

$$\mathrm{E}_z = \frac{\mu_{zz}(d_0, d_1, ..., d_n, x)\frac{dH_y}{dx} + \alpha_{zz}(f_0, f_1, ..., f_n, x)\frac{dE_y}{dx}}{j\omega[\varepsilon_{zz}(a_0, a_1, ..., a_n, x)\mu_{zz}(d_0, d_1, ..., d_n, x) - \alpha_{zz}(f_0, f_1, ..., f_n, x)\nu_{zz}(\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n, x)]}, \tag{14}$$

$$H_z = -\frac{\varepsilon_{zz}(a_0, a_1, ..., a_n, x)\frac{dE_y}{dx} + \nu_{zz}(\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n, x)\frac{dH_y}{dx}}{j\omega[\varepsilon_{zz}(a_0, a_1, ..., a_n, x)\mu_{zz}(d_0, d_1, ..., d_n, x) - \alpha_{zz}(f_0, f_1, ..., f_n, x)\nu_{zz}(\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n, x)]}. \tag{15}$$

Переобозначив

$$\theta_{xx}(x) = \frac{\mu_{xx}}{\varepsilon_{xx}\mu_{xx} - \nu_{xx}\alpha_{xx}}, t_{xx}(x) = \frac{\alpha_{xx}}{\varepsilon_{xx}\mu_{xx} - \nu_{xx}\alpha_{xx}}, Q_{xx}(x) = \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}\mu_{xx} - \nu_{xx}\alpha_{xx}},$$

$$T_{xx}(x) = \frac{\nu_{xx}}{\varepsilon_{xx}\mu_{xx} - \nu_{xx}\alpha_{xx}}, \theta_{zz}(x) = \frac{\mu_{zz}}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \nu_{zz}\alpha_{zz}}, t_{zz}(x) = \frac{\alpha_{zz}}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \nu_{zz}\alpha_{zz}},$$

$$Q_{zz}(x) = \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \nu_{zz}\alpha_{zz}}, T_{zz}(x) = \frac{\nu_{zz}}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \nu_{zz}\alpha_{zz}};$$

получаем:

$$\mathrm{E}_x = \frac{\gamma}{j\omega}\left[\theta_{xx}(x)H_y + t_{xx}(x)E_y\right], \tag{16}$$

$$H_x = -\frac{\gamma}{j\omega}\left[Q_{xx}(x)E_y + T_{xx}(x)H_y\right], \tag{17}$$

$$\mathrm{E}_z = \frac{1}{j\omega}\left[Q_{zz}(x)\frac{dH_y}{dx} + t_{zz}(x)\frac{dE_y}{dx}\right], \tag{18}$$

$$H_z = -\frac{1}{j\omega}\left[Q_{zz}(x)\frac{dE_y}{dx} + T_{zz}(x)\frac{dH_y}{dx}\right]. \tag{19}$$

Подставляя выражения (12) - (15) в уравнения (7) – (10), получаем основную систему квазидифференциальных волновых уравнений поверхностных и псевдоповерхностных волн смешанного спектра в симметричной нанокристаллической плёночной структуре с тензорными характеристиками внутренней волноведущей среды:

$$\frac{j\gamma^2}{\omega}Q_{xx}(x)E_y + \frac{j\gamma^2}{\omega}T_{xx}(x)H_y + \frac{1}{j\omega}\frac{dQ_{zz}(x)}{dx}\frac{dE_y}{dx} + \frac{1}{j\omega}Q_{zz}(x)\frac{d^2E_y}{dx^2} + \frac{1}{j\omega}\frac{dT_{zz}(x)}{dx}\frac{dH_y}{dx} +$$

$$+\frac{1}{j\omega}T_{zz}(x)\frac{d^2H_y}{dx^2} = j\omega\varepsilon_{yy}(g_0, g_1, ..., g_n, x)E_y + j\omega\alpha_{yy}(h_0, h_1, ..., h_n, x)H_y, \tag{20}$$

$$Q_{zz}(x)\frac{d^2E_y}{dx^2}+T_{zz}(x)\frac{d^2H_y}{dx^2}+\frac{dQ_{zz}(x)}{dx}\frac{dE_y}{dx}+\frac{dT_{zz}(x)}{dx}\frac{dH_y}{dx}+\left[\omega^2\varepsilon_{yy}(g_0,g_1,...,g_n,x)+\right.$$
$$\left.+\,j\gamma^2Q_{xx}(x)\right]E_y+\left[\omega^2\alpha_{yy}(h_0,h_1,...,h_n,x)+j\gamma^2T_{xx}(x)\right]H_y=0, \tag{21}$$

$$\frac{j\gamma^2}{\omega}\theta_{xx}(x)H_y+\frac{j\gamma^2}{\omega}t_{xx}(x)E_y+\frac{1}{j\omega}\frac{d\theta_{zz}(x)}{dx}\frac{dH_y}{dx}+\frac{1}{j\omega}\theta_{zz}(x)\frac{d^2H_y}{dx^2}+\frac{1}{j\omega}\frac{dt_{zz}(x)}{dx}\frac{dE_y}{dx}+$$
$$+\frac{1}{j\omega}t_{zz}(x)\frac{d^2E_y}{dx^2}=j\omega\mu_{yy}(e_0,e_1,...,e_n,x)H_y+j\omega\nu_{yy}(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n,x)E_y, \tag{22}$$

$$\theta_{zz}(x)\frac{d^2H_y}{dx^2}+t_{zz}(x)\frac{d^2E_y}{dx^2}+\frac{d\theta_{zz}(x)}{dx}\frac{dH_y}{dx}+\frac{dt_{zz}(x)}{dx}\frac{dE_y}{dx}+\left[\omega^2\mu_{yy}(e_0,e_1,...,e_n,x)+\right.$$
$$\left.+\,j\gamma^2\theta_{xx}(x)\right]H_y+\left[\omega^2\nu_{yy}(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n,x)+j\gamma^2t_{xx}(x)\right]E_y=0. \tag{23}$$

В покомпонентном виде, не выделяя зависимость от параметров градиентности и поперечной координаты, система связанных уравнений (20)-(23) принимает вид:

$$\varepsilon_{zz}(\varepsilon_{zz}\mu_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz})(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})\frac{d^2E_y}{dx^2}+\nu_{zz}(\varepsilon_{zz}\mu_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz})(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})\frac{d^2H_y}{dx^2}+$$
$$+A(x)(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})\frac{dE_y}{dx}+B(x)(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})\frac{dH_y}{dx}+\left[\omega^2\varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})+\right.$$
$$\left.+\,j\gamma^2\varepsilon_{xx}\right](\varepsilon_{zz}\mu_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz})^2E_y+\left[\omega^2\alpha_{yy}(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})+j\gamma^2\nu_{xx}\right](\varepsilon_{zz}\mu_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz})^2H_y=0, \tag{24}$$

$$\mu_{zz}(\varepsilon_{zz}\mu_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz})(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})\frac{d^2H_y}{dx^2}+\alpha_{zz}(\varepsilon_{zz}\mu_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz})(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})\frac{d^2E_y}{dx^2}+$$
$$+A_1(x)(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})\frac{dH_y}{dx}+B_1(x)(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})\frac{dE_y}{dx}+\left[\omega^2\mu_{yy}(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})+\right.$$
$$\left.+\,j\gamma^2\mu_{xx}\right](\varepsilon_{zz}\mu_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz})^2H_y+\left[\omega^2\nu_{yy}(\varepsilon_{xx}\mu_{xx}-\alpha_{xx}\nu_{xx})+j\gamma^2\alpha_{xx}\right](\varepsilon_{zz}\mu_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz})^2E_y=0, \tag{25}$$

где

$$A(x)=\alpha'_{zz}\varepsilon_{zz}+\alpha_{zz}\nu'_{zz}\varepsilon_{zz}-\alpha_{zz}\nu_{zz}\varepsilon'_{zz}-\varepsilon^2_{zz}\mu'_{zz}\ ,\ B(x)=\nu'_{zz}\varepsilon_{zz}\mu_{zz}+\alpha'_{zz}\nu^2_{zz}-\nu_{zz}\mu_{zz}\varepsilon'_{zz}-\nu_{zz}\varepsilon_{zz}\mu'_{zz}\ ,$$
$$A_1(x)=\alpha'_{zz}\varepsilon_{zz}\mu_{zz}+\alpha^2_{zz}\nu'_{zz}-\alpha_{zz}\mu_{zz}\varepsilon'_{zz}-\alpha_{zz}\varepsilon_{zz}\mu'_{zz}\ ,\ B_1(x)=\nu_{zz}\alpha'_{zz}\mu_{zz}+\alpha_{zz}\mu_{zz}\nu'_{zz}-\mu'_{zz}\alpha_{zz}\nu_{zz}-\mu^2_{zz}\varepsilon'_{zz}.$$

Для аппроксимации материальных характеристик искусственных волноведущих сред будем применять степенные, экспоненциальные, полиномиальные и ряд других функций. В случае произвольной функциональной аналитической зависимости элементов тензоров материальных характеристик от координат или времени её всегда можно разложить в ряд Тейлора по степеням аргумента. В ходе выполнения численных расчётов нами было установлено, что уже несколько первых членов ряда хорошо аппроксимируют свойства экспериментально определённой характеристики градиентной бианизотропной среды, поэтому вместо ряда при проведении дальнейшего исследования достаточно ограничиться полиномом. Данный результат является первоосновным в строгой теории волн в градиентных бианизотропных регулярных и нерегулярных структурах, так как позволяет получить все необходимые волновые характеристики.

4. Выводы по результатам работы

Дифференциальные уравнения для искусственных сред с полиномиальными аппроксимациями содержат переменные коэффициенты в виде полиномов, некоторые из них уже хорошо изучены, другие приводят к новым специальным функциям[4,5]. В зависимости от знака коэффициентов полинома и его степени полученная система дифференциальных уравнений охватывает многие хорошо изученные уравнения. Система связанных уравнений (24), (25) настолько общая, что помимо целого ряда изученных уравнений содержит большое количество ещё не изученных. Для таких систем уравнений можно использовать метод решения в виде обобщённых степенных рядов или метод Фробениуса, который нашёл дальнейшее развитие в работах Латышевой К.Я. Поэтому тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей внутри волноведущей структуры для биквадратичных профилей элементов тензоров диэлектрической, магнитной и магнитоэлектрической проницаемостей можно записать в виде:

$$E_y = D_1\Phi_1(q_0, q_1, ..., q_n, x) + D_2\Phi_2(q_0, q_1, ..., q_n, x), \tag{26}$$

$$H_y = C_1\Psi_1(q_0, q_1, ..., q_n, x) + C_2\Psi_2(q_0, q_1, ..., q_n, x). \tag{27}$$

Для практического применения этих новых специальных решений возникает отдельная задача их табулирования, то есть изучения их зависимости от величины входящих параметров градиентности, распределения корней, асимптотического поведения решений.

Другие компоненты электрического и магнитного векторов находятся из равенств (12) – (15). Поля в окружающих слоях представляются суммой электрических и магнитных волн. С учётом граничных условий найдены трансцендентные уравнения для постоянных распространения собственных гибридных мод волноведущей структуры. Полученные результаты позволяют создать основы строгой теории волн в градиентных бианизотропных регулярных и нерегулярных структурах.

5. Литература

[1] Киреева, А.И. К теории дифракции поверхностных волн на открытом конце планарной композиционной структуры с искусственной средой / И.П. Руденок, А.И. Киреева // Инженерный Вестник Дона. – 2017. – № 1. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru.

[2] Kireeva, A.I. Some elements of investigation the transformation of surface and pseudosurface modes in an open asymmetric thin-film structure with a synthetic medium / A.I. Kireeva, I.P. Rudenok // SPIE Proc. – 2017. – Art. 104662A. DOI: 10.1117/12.2288778.

[3] Руденок, И.П. Об одной системе связанных уравнений модовых взаимодействий в композиционных структурах со сложной внутренней средой / И.П. Руденок, А.И. Руденок // Тезисы XXIII Междунар. симп. Оптические технологии в телекоммуникациях. – Иркутск, ИОА СО РАН им. В.Е.Зуева, 2017. – С. 90-93. Режим доступа: http://symp.iao.ru /files/symp/aoo/23/B(1).pdf.

[4] Rudenok, I.P. Peculiar waves in planar continuously heterogeneous structures with optical bianisotropy / I.P. Rudenok, A.I. Kireeva // Thesis of XIII Int. conf. Pulsed lasers and laser applications. – Irkutsk, Institute of Atmospheric Optics named after V.E. Zuev, 2017. – P. 56.

[5] Руденок, И.П. О преобразованиях направляемых мод в композиционных наноструктурах с градиентными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей / И.П. Руденок, А.И. Киреева // Тезисы и доклады XV Междунар. науч.-техн. конф. Физика и технические приложения волновых процессов. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. – С. 19-22.

Special wave solutions in the theory of waves of a mixed spectrum in planar gradient bianisotropic nanocrystalline structure

A.I. Kireeva[1], I.P. Rudenok[2]

[1]Volgograd State Medical University, Square of the Fallen Fighters 1, Volgograd, Russia, 400131
[2]Volgograd State Technical University, Lenin Avenue 28, Volgograd, Russia, 400005

Abstract. The propagation of surface and pseudosurface waves of a mixed spectrum in a symmetric nanocrystalline film structure with continuously-inhomogeneous anisotropic material characteristics was considered. The substrate and coating of the compositional structure had the same scalar dielectric and magnetic permeabilities. The artificial medium of the waveguide layer was made from a bianisotropic material with an anisotropy of the magneto-dielectric bond, characterized by four tensors of the dielectric, magnetic, and magneto-dielectric permeabilities with nonzero diagonal elements. They depended on spatial coordinates with a biquadratic law. A system of coupled quasi-differential wave equations was obtained toward to the transverse components of the electric and magnetic fields from Maxwell's equations with taking into account specific material relationships. It had linearly independent solutions, which were represented in the form of generalized series. Recurrence relations were determined for the determination of their terms. Taking into account the continuity of the tangential components of the electric and magnetic fields, a dispersion equation for calculating the transverse wave numbers was found. From the structure of the system of wave equations and the solutions we obtained follows the existence of four proper surface and pseudosurface waves with different polarizations, which possess a whole series of fundamentally new characteristics.