О некоторых обобщениях формулы Хинчина-Полячека для систем массового обслуживания с коррелированными входными потоками

И.А. Блатов[1], Б.Я. Лихтциндер[1], Е.В. Китаева[2]

[1]Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Льва Толстого 23, Самара, Россия, 443010
[2]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Рассматривается математическая модель простейшей одноканальной системы массового обслуживания (СМО) в случае входящего потока с произвольной корреляцией. Для данной СМО получены различные обобщения формулы Хинчина-Полячека средней длины очереди. Предложена интервальная модель входящего потока, в рамках которой получено выражение средней длины очереди через безусловные моменты второго порядка.

1. Введение

Одним из перспективных , на наш взгляд, направлений изучения пакетного трафика является разрабатываемый нами Интервальный метод [1],[2], позволяющий заменить анализ интервалов времени между соседними заявками и интервалов времени обработки заявок, анализом одной случайной величины - числом заявок, поступающих в течение последовательных интервалов времени обработки каждой из заявок. Нами показано, что дисперсия и корреляционные свойства указанной случайной величины, при заданной загрузке, полностью характеризуют размер очереди в системах массового обслуживания [2].

В настоящем докладе для одноканальной системы с коррелированным входящим потоком и постоянным временем обработки заявок при весьма общих предположениях стационарности и эргодичности получены формулы средней длины очереди, обобщающие формулу Хинчина-Полячека [3]. При этом применение модели, основанной на интервальном методе, позволило получить формулу, выражающую среднюю длину очереди через безусловные ковариации входящего потока.

2. Постановка задачи

Введем терминологию и обозначения. Анализируются стационарные потоки заявок (пакетов). Весь промежуток времени анализа разбивается на равные интервалы τ_i одинаковаой длины τ . Считается, что интервал времени обработки каждой из заявок - постоянный и равен τ. Числа заявок на i-м интервале обозначаем через $m_i(\tau)$. Пусть $\rho = \lambda\tau$ – коэффициент загрузки , где λ – средняя интенсивность заявок. Предполагается, что $\rho \in (0,1)$. Величины $\overline{m(\tau)} = \lambda\tau = \rho$ и $D_m(\tau) = \overline{[m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}]}$ – математическое ожидание и дисперсия чисел заявок, поступающих в течение интервала времени τ, соответственно. Через $q_i(\tau)$ обозначим количество заявок, стоящих в очереди на i-м интервале обработки (длину очереди). Через $\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = K[q_{i-1}(\tau), m_i(\tau)]$ обозначим ковариацию случайных величин $q_{i-1}(\tau)$ и $m_i(\tau)$. Все рассматриваемые в статье предельные переходы рассматриваются в смысле сходимости по вероятности. Для предположений, которые мы будем делать по ходу статьи, будем использовать обозначения $\mathbf{A1}, \mathbf{A2}, \cdots$.

Для любой одноприборной СМО справедливо рекуррентное соотношение, устанавливающее связь между поступающими и обработанными заявками [3]:

$$q_i(\tau) = q_{i-1}(\tau) + m_i(\tau) - \delta_i(\tau), \tag{1}$$

где

$$\delta_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{i-1}(\tau) = m_i(\tau) = 0, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае пуассоновского потока заявок с постоянным временем обслуживания, для средней длины очереди (математического ожидания) известна формула Хинчина - Поллячека [3], с. 157, которая в имеет вид

$$\overline{q(\tau)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}. \tag{2}$$

В [4] было получено обобщение формулы (2) на случай произвольных коррелированных потоков:

$$\overline{q(\tau)} = \frac{D_m(\tau) + 2\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}. \tag{3}$$

Задачей настоящей статьи является получение формул, в которых средняя длина очереди выражается через корреляционные свойства входящего потока $m_i(\tau)$ при весьма общих предположениях.

3. Предположения и предварительные результаты

В [6] формула (3) была преобразована к более удобному для применения виду. Приведем основные результаты [6], поскольку они необходимы для решения задач данной статьи.

Преобразуем формулу (3). Введем понятие цикла обслуживания. Циклом обслуживания $Z_k = \bigcup_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} I_j$ будем называть совокупность смежных интервалов обработки I_j, на которых $q_j > 0$ везде, кроме последнего интервала, на котором очередь обнуляется после обработки последней заявки, а слева от данного цикла тоже находится хотя бы один такой интервал. Здесь N_k обозначает количество смежных интервалов – длину k-го цикла.

Замечание 1. Понятие цикла обслуживания отличается от введенного Л. Клейнроком [5] понятия периода занятости, поскольку, период занятости предполагает наличие слева и справа, как минимум, одного интервала, на котором $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$. Поэтому период занятости Клейнрока может содержать несколько циклов Z_k. Целесообразность введения данного понятия обоснована в [6].

Сделаем следующие предположения.

A1. Гипотеза эргодичности и взаимной стационарности. *Предположим, что все рассматриваемые процессы обладают свойствами эргодичности, стационарности и взаимной стационарности в широком смысле. В частности, при $j > i$*

$$\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} q_{i-k-1}(\tau)[m_{i-k}(\tau) - \overline{m(\tau)}]. \tag{4}$$

А2. Гипотеза о затухании взаимной корреляции. *Предположим, что*

$$\lim_{N\to\infty}\mu_{q_{i-N-1}m_i}(\tau)=0. \tag{5}$$

В статье [6] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для стационарного потока заявок $m_i(\tau)$ с конечным математическим ожиданием $\overline{m(\tau)}$ и дисперсией $D_m(\tau)$ выполнены предположения А1 и А2. Тогда справедливы формулы*

$$\overline{q(\tau)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{Z_s\subset[1,N]}\sum_{j=0}^{N_s-1}(N_s-j)(m_{j_s+j}(\tau)-1), \tag{6}$$

$$\overline{q(\tau)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{Z_s\subset[1,N]}\sum_{j=0}^{N_s-1}j(1-m_{j_s+j}), \tag{7}$$

где j_s обозначает начало цикла Z_s.

Замечание 2. Формула (6) удобна для теоретического исследования свойств очередей в зависимости от свойств и структуры циклов обработки. Формула (7) удобна для практической оценки длины очереди по имеющимся статистическим данным в случае, когда длина $N_s=j_{s+1}-j_s+1$ очередного цикла занятости заранее не известна, а определяется компьютером в процессе обработки.

Полученные соотношения устанавливают непосредственную зависимость средней длины очереди от длительностей циклов обслуживания СМО.

4. Основные результаты

Приведем результаты преобразования формулы (3) к выражению, зависящему от корреляционных свойств входящего потока m_i .

Теорема 2. *Справедливы формулы*

$$\overline{q(\tau)}=\frac{1}{2}(D_m(\tau)-\rho(1-\rho))+\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{Z_s\subset[1,N]}m_i(\tau)\sum_{j=j_s}^{i-1}(m_j(\tau)-1). \tag{8}$$

Второе слагаемое в (8) при естественных дополнительных предположениях есть весовая сумма условных ковариаций элементов входящего потока. Покажем это.

Пусть $A_{i,i-j}(\tau)=\{\delta_k=1,k=i-j,i-j+1,\cdots,i\}$ – случайное событие, состоящее в том, что случайные величины $m_{i-j}(\tau),m_{i-j+1}(\tau),\cdots,m_i(\tau)$ при реализации случайного процесса $\{m_i\}$ принимают значения в пределах одного цикла обработки. Пусть $\mu_{i,i-j}(\tau)=cov_{A_{i,i-j}(\tau)}(m_i(\tau),m_{i-j}(\tau))$ условная ковариация случайных величин $m_i(\tau),m_{i-j}(\tau)$ при условии наступления события $A_{i,i-j}(\tau)$. Обозначим $A_{j,0}(\tau)=A_j(\tau)$,$\mu_{j,0}(\tau)=\mu_j(\tau)$.

А3. Дополнительная гипотеза стационарности *Предположим, что для всех i,j*

$$P(A_{i,i-j}(\tau))=P(A_j(\tau)),\mu_{i,i-j}(\tau)=\mu_{j,0}(\tau)=\mu_j(\tau). \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть справедливы предположения А1-А3. Тогда имеет место формула*

$$\overline{q(\tau)}=\frac{1}{2}(D_m(\tau)-\rho(1-\rho))+\sum_{j=1}^{+\infty}\mu(j)P(A_j(\tau)). \tag{10}$$

Формулы (10) содержат условные корреляции и вероятности $P\left(A_j\left(\tau\right)\right)$, вычисление которых затруднительно. Получим формулу, содержащую только безусловные моменты второго порядка нового случайного процесса, тесно связанного с исходным.

Произведем замену переменной интервалов τ_i, на которых рассматривается поступление заявок, на другую переменную - θ_i, которая представляет собой интервал между двумя соседними заявками, покидающими очередь.Числа заявок, поступивших на указанных интервалах, обозначим через $m_i(\theta)$. Это и есть новый случайный процесс, который мы рассмотрим.

Замечание 3. Каждая реализация случайного процесса $m_i(\theta)$ совпадает с соответствующей реализацией исходного случайного процесса $m_i(\tau)$, из которой удалены все участки покоя, на которых $m_i(\tau) = \delta_i = 0$, т.е. остаются только примыкающие друг к другу циклы обслуживания.

Обозначим через $A_i(\theta)$ величину, определяемую для процесса $m_i(\theta)$ аналогично ранее введенной величине величине $A_i(\tau\,)$ для процесса $m_i(\tau)$.

A4. Гипотезы A1-A3 для процесса $m_i(\theta)$**.** *Предположим, что для нового случайного процесса также справедливы гипотезы* **A1-A3**.

Очевидно, что для процесса $m_i(\theta)$ справедлива формула $\overline{m_i(\theta)} = 1$.
Пусть $\nu_m(k,\theta) = cov(m_i(\theta), m_{i-j}(\theta))$, $k = i-j$ – безусловная ковариация числа заявок нового случайного процесса.

Теорема 4. *Пусть справедливы предположения A1-A4. Тогда имеет место формула*

$$\overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1-\rho)) + \rho\sum_{k=1}^{+\infty}\nu_m(k,\theta). \tag{11}$$

В формуле (11) присутствует дисперсия исходного случайного процесса $m_i(\tau)$. Обозначим через $D_m(\theta)$ дисперсию процесса $m_i(\theta)$. Очевидно, что $D_m(\theta) = D_{\delta=1}(\tau)$. В [6] была получена формула

$$D_m(\tau) = D_{\delta=1}(\tau)\cdot\rho + \rho(1-\rho). \tag{12}$$

Поэтому,подставляя (12) в (11), получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть справедливы предположения A1-A4. Тогда имеет место формула*

$$\overline{q(\tau)} = \rho\Big(\frac{D_m(\theta)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\nu_m(k,\theta)\Big). \tag{13}$$

Теоремы 1-5 получены при условии справедливости предположений A1-A4. Однако численные эксперименты для реальных потоков показали, что гипотезы затухания корреляции могут не выполнться. Приведем результат, который справедлив только при выполнении предположений эргодичности и стационарности .

Пусть

$$\nu_m(k,\theta,M) = \frac{1}{M-k}\sum_{i=k+1}^{M} m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta)-1) \tag{14}$$

безусловная выборочная ковариация числа заявок нового случайного процесса.

Теорема 6. *Пусть для процессов $m_i(\tau)$ и $m_i(\theta)$ справедливы предположения эргодичности и стационарности. Тогда имеет место формула*

$$\overline{q(\tau)} = \frac{\rho}{2}\Big(D_m(\theta) + 2\lim_{M\to\infty}\sum_{k=1}^{M-1}\frac{M-k}{M}\nu_m(k,\theta,M)\Big). \tag{15}$$

5. Благодарности
Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-01-00650.

6. Литература

[1] Лихтциндер, Б.Я. Интервальный метод анализа мультисервисного трафика сетей доступа // Электросвязь. – 2015. – № 12. – С. 52-54.
[2] Лихтциндер, Б.Я. Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование) – М.: Горячая линия - Телеком, 2018. – 290 с.
[3] Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – М.: Наука, 1988. – 208 с.
[4] Лихтциндер, Б.Я. Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей доступа – Самара: ПГУТИ, 2015. – 121 с.
[5] Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания – М.: Машиностроение, 1979. – 600 с.
[6] Блатов, И.А. Об оценке длин очередей в СМО с произвольной корреляцией / И.А. Блатов, Б.Я. Лихтциндер // IV Международная конференция и молодежная школа "Информационные технологии и нанотехнологии". – 2018. – С. 1607-1616.

On some generalizations of the Khinchin-Polyachek formula for queuing systems with correlated input flows

I.A. Blatov[1], B.Ya. Likhttsinder[1], E.V. Kitaeva[2]

[1]Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Lev Tolstoy street 23, Samara, Russia, 443010
[2]Samara National Research University, Moskovskoe shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The mathematical model of the simplest single-channel queuing systems (QS) in case of incoming flow with arbitrary correlation is considered. For this QS various generalizations of the Khinchin-Polyachek formula of the average queue length are obtained. An interval model of the incoming flow is proposed, within which an expression of the average queue length through unconditional moments of second order is obtained.