

О некоторых методах генерирования экстремально мультистабильных систем

И.М. Буркин¹, О.И. Кузнецова¹

¹Тульский государственный университет, проспект Ленина 92, Тула, Россия, 300012

Аннотация. Мультистабильная динамическая система может демонстрировать решения с принципиально различным поведением в зависимости от выбора их начальных условий, что создает угрозу ее использования в практических инженерных приложениях. С другой стороны, мультистабильность системы может являться ее неоспоримым преимуществом в том случае, когда она используется, например, для скрытия информации в системах коммуникаций и аудиосхемах шифрования для повышения производительности защищенной связи, поскольку в данном случае специальный выбор начальных условий может играть роль "секретного ключа". В работе предлагаются некоторые подходы к генерированию экстремально мультистабильных систем, содержащих бесконечное число аттракторов, с использованием математических моделей систем автоматического регулирования в форме Лурье.

1. Введение

Мультистабильность реальной динамической системы может создать угрозу в практических инженерных приложениях, поскольку поведение системы не может быть однозначно гарантировано. Мультистабильная система может демонстрировать решения с принципиально различным поведением в зависимости от выбора их начальных условий. По этой причине в последнее время изучению мультистабильных систем посвящено большое число работ [1-8]. С другой стороны, мультистабильность системы может являться ее неоспоримым преимуществом в том случае, когда она используется, например, для скрытия информации в системах коммуникаций [9] и аудиосхемах шифрования для повышения производительности защищенной связи [10], поскольку в данном случае специальный выбор начальных условий может играть роль "секретного ключа".

Экстремально мультистабильными (бесконечно мультистабильными) [11] называют системы, содержащие бесконечное число сосуществующих нетривиальных аттракторов. В последние годы появились работы, посвященные искусственному конструированию экстремально мультистабильных систем [12,13]. Тип экстремальной мультистабильности, демонстрируемый системами, сконструированными в упомянутых работах, характерен только для систем, порядок которых выше трех. Недавно в серии работ [11,14,15] был рассмотрен класс динамических систем, названных *системами, допускающими смещение сдвигом по переменным (offset boostable dynamical system)*. К таким системам относятся, в частности, системы каскадного типа. В системе каскадного типа легко осуществить такое преобразование сдвига ее координат (смещение), которое меняет положение аттракторов системы в ее фазовом пространстве, не меняя в то же время динамику некоторых переменных. Последнее

обстоятельство, в свою очередь, доставляет возможность трансформации системы каскадного типа в динамическую систему, обладающую бесконечной сетью сосуществующих идентичных аттракторов. Рассмотренный подход позволяет конструировать, например, экстремально мультистабильные системы третьего порядка.

В настоящей статье предлагаются методы конструирования экстремально мультистабильных систем порядка не менее чем 3, обладающих 1-D и 2-D сетью аттракторов (как самовозбуждающихся, так и скрытых [16]), на основе математических моделей систем автоматического регулирования в форме Лурье. В основу предлагаемых методов положены некоторые подходы к исследованию многомерных систем в форме Лурье, развитые в [17]. В разделе 2 сконструирована система третьего порядка, обладающая 1-D сетью аттракторов, треть из которых являются скрытыми, в две трети – самовозбуждающимися. В разделе 3 построена система, имеющая 1-D сеть скрытых хаотических аттракторов-близнецов. Наконец, в разделе 3 построена трехмерная система, содержащая 2-D сеть хаотических аттракторов.

2. Генерирование экстремально мультистабильных систем с использованием систем регулирования в форме Лурье

Системой в форме Лурье называют систему вида

$$\dot{x} = Ax + b\phi(\sigma), \sigma = c^* x, \quad (1)$$

где A – постоянная $n \times n$ - матрица, b и c – постоянные n - векторы, все величины вещественные, $*$ – знак транспонирования (или эрмитова сопряжения в комплексном случае), $\phi(\sigma)$ – непрерывная, кусочно-дифференцируемая, скалярная функция. Пусть I – единичная $n \times n$ -матрица. Для системы (1) определим дробно-рациональную функцию комплексного аргумента p следующим образом: $\chi(p) = c^*(A - pI)^{-1}b$. Пусть $\chi(p) = m(p)[n(p)]^{-1}$, причем многочлен в знаменателе дроби $\chi(p)$ имеет степень n и несократим с ее числителем. В этом случае говорят [18], что передаточная функция $\chi(p)$ невырожденная.

Положим в (1) $\phi(\sigma) = \mu\sigma$, то есть рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = (A + \mu bc^*)x. \quad (2)$$

Будем предполагать, что число μ выбрано так, что система (2) не имеет периодических решений, то есть матрица $A + \mu bc^*$ не имеет чисто мнимых собственных значений.. Поскольку при непрерывном изменении μ спектр матрицы $A + \mu bc^*$ меняется непрерывно, то на плоскости (σ, ϕ) можно построить такой сектор $S[v_1, v_2] = \{\sigma, \phi : v_1 \leq \frac{\phi}{\sigma} \leq v_2\}$, что матрицы всех линейных систем с $\phi = \mu\sigma, v_1 \leq \mu \leq v_2$ имеют одно и тоже число собственных значений в правой полуплоскости и не имеют их на мнимой оси. Расширяя сектор $S[v_1, v_2]$, мы придем к таким значениям $v_1 = \mu_j, v_2 = \mu_{j+1}$, что

$$1 + \mu_j \chi(i\omega_j) = 0, \quad 1 + \mu_{j+1} \chi(i\omega_{j+1}) = 0. \quad (3)$$

Очевидно, что чисел μ , для которых выполняется условие (3), может быть лишь конечное число. Добавим к ним значения $-\infty$ и ∞ , а в случае вырожденной матрицы A также число $\mu = 0$, и положим

$$\mu_1 = -\infty < \mu_2 < \dots < \mu_p < \mu_{p+1} = \infty.$$

Открытый сектор $S(\mu_h, \mu_{h+1})$ назовем сектором линейной устойчивости при $k=0$ и сектором линейной неустойчивости степени k при $k > 0$. Таким образом, плоскость (σ, ϕ) разбита прямыми $\phi = \mu_h \sigma$ на l секторов $S[\mu_h, \mu_{h+1}], h = 1, 2, \dots, l$.

Для генерирования экстремально мультистабильной системы вида (1) воспользуемся одним результатом, полученным в работе [17]. Приведем формулировку теоремы, установленной в [17] в удобной для нас форме.

Теорема. Пусть в системе (1) матрица A имеет одно нулевое собственное значение, $n-1$ собственных значений с отрицательными вещественными частями, передаточная функция $\chi(p)$ невырожденная, $\lim_{p \rightarrow \infty} p\chi(p) = -c^*b \geq 0$ и выполнены следующие условия:

1) Существуют $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0, \lambda_1 > 0$ такие, что для любых $\omega \geq 0$ справедливо соотношение

$$\operatorname{Re}[1 + \mu_1\chi(i\omega - \lambda_1)]^*[1 + \mu_2\chi(i\omega - \lambda_1)] > 0. \tag{4}$$

При этом для некоторого $\hat{\mu} \in (\mu_1, \mu_2)$ матрица $A + \hat{\mu}bc^*$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda_1 \leq \operatorname{Re} p \leq 0$.

2) Существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что матрица $A + \lambda_2 I$ имеет одно положительное собственное значение, $n-1$ собственных значений с отрицательными вещественными частями и при всех $\omega \geq 0$ выполнено неравенство с некоторым $\nu > 0$

$$\operatorname{Re} \chi(i\omega - \lambda_2) + \nu |\chi(i\omega - \lambda_2)|^2 \leq 0. \tag{5}$$

Тогда можно указать такую Δ -периодическую непрерывную функцию $\phi(\sigma)$, имеющую ровно два нуля на периоде, что система (1) будет иметь в каждой полосе $X_k = \{x: (k-1)\Delta \leq c^*x \leq k\Delta\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) любое наперед заданное число орбитально асимптотически устойчивых циклов.

Алгоритм конструирования функции $\phi(\sigma)$, обладающей нужными свойствами, описан в работе [17]. Основная идея этого алгоритма, говоря несколько неточно, состоит в построении этой функции таким образом, чтобы ее график пребывал поочередно "достаточно долго" в секторах линейной устойчивости и линейной неустойчивости степени 2 системы (1). При этом ясно, что если система (1) с периодической нелинейностью и двумя состояниями равновесия на периоде Δ имеет на каждом периоде не менее трех циклов, то она имеет бесконечное число скрытых циклов. Последнее означает, что бассейн притяжения этих циклов не будет пересекаться с малой окрестностью ни одного из состояний равновесия системы.

Пример. Рассмотрим систему вида (1) с передаточной функцией $\chi(p) = (p^3 + 3p^2 + 1.92p)^{-1}$. Для такой передаточной функции выполнены условия (4), (5) сформулированной выше теоремы с $\mu_1 = -0.5, \mu_2 = 10, \lambda_1 = 1.6$ и $\lambda_2 = 0.4, \nu = 0.352$. Сектор $(-\infty, 0)$ - сектор неустойчивости степени 1, сектор $(0, 5.76)$ - сектор линейной устойчивости, сектор $(5.76, \infty)$ - сектор неустойчивости степени 2. Следуя описанной в работе [17] процедуре, построим нечетную периодическую функцию $\phi(\sigma)$ периода $\Delta = 0.12(e^{1.2} + 2)$ так, чтобы ее график поочередно "достаточно долго" пребывал в каждом из секторов $(5.76, \infty)$ и $(0, 5.76)$, и на каждом периоде система имела три орбитально асимптотически устойчивых цикла. Один из этих циклов будет скрытым, а области притяжения двух других будут пересекаться с малой окрестностью состояний равновесия системы. В силу периодичности построенной нелинейности система будет иметь бесконечное число циклов, треть из которых будут скрытыми, а две трети - самовозбуждающимися.

На полупериоде $[0, \frac{\Delta}{2}]$ зададим функцию $\phi(\sigma)$ следующим образом:

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} 6\sigma, & 0 \leq \sigma \leq 0.01; \\ 0.06, & 0.01 \leq \sigma \leq 0.02; \\ 0.06e^{(200\sigma-4)}, & 0.02 \leq \sigma \leq 0.038; \\ 0.06e^{(11.2-200\sigma)}, & 0.038 \leq \sigma \leq 0.05; \\ 0.06e^{1.2}, & 0.05 \leq \sigma \leq 0.08; \\ 0.06e^{(200\sigma-14.8)}, & 0.08 \leq \sigma \leq 0.1; \\ 0.06e^{(25.2-200\sigma)}, & 0.1 \leq \sigma \leq 0.12; \\ 0.06e^{1.2} - \sigma + 0.12, & 0.12 \leq \sigma \leq 0.06e^{1.2} + 0.12. \end{cases}$$

На рисунке 1 представлен график функции $\phi(\sigma)$ на полупериоде. На рисунке 2 представлены проекции на плоскость (x_1, x_2) траекторий системы (1) со сдвигом на период. Из каждой тройки циклов "средний" цикл является скрытым.

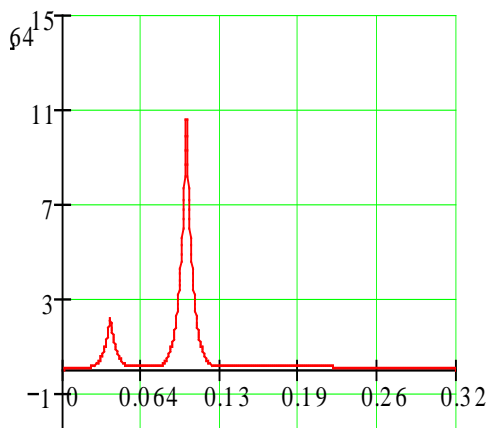


Рисунок 1. График функции $\phi(\sigma)$ на полупериоде.

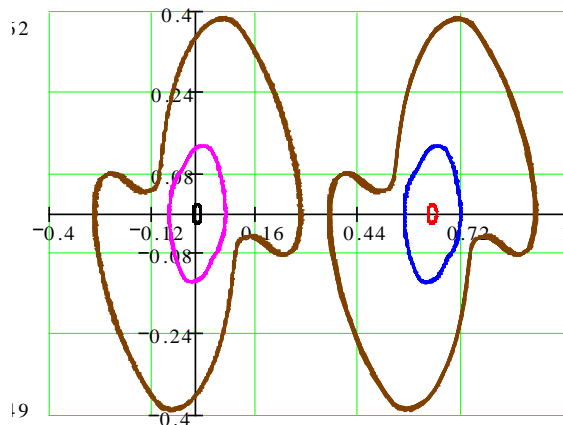


Рисунок 2. Проекция на плоскость (x_1, x_2) фрагмента 1-D сети аттракторов.

3. Система с 1-D сетью скрытых хаотических аттракторов

Пусть передаточная функция системы (1) третьего порядка имеет вид $\chi(p) = (\alpha p^2 + \beta p + \gamma)(p^3 + mp^2 + rp + l)^{-1}$. Предположим, что матрица $A + kbc^*$ для некоторого значения k имеет нулевое собственное значение и на плоскости (σ, ϕ) имеется два сектора линейной устойчивости, и по одному сектору линейной неустойчивости степени 1 и 2. Передаточными функциями с такими свойствами обладают многие реальные системы, например, классическая система Чуа [16]. Именно в этой системе в работе [16] впервые был обнаружен скрытый хаотический аттрактор. Без ограничения общности можно считать, что в рассматриваемом случае матрица A в системе (1) особая.

Основная идея конструирования системы, обладающей 1-D сетью скрытых хаотических аттракторов, в рассматриваемом случае состоит в следующем. Сначала строится система (1), обладающая скрытым хаотическим аттрактором, с нечетной нелинейностью, имеющей 3 нуля: $(-\sigma_0), 0, \sigma_0$. Для этого нелинейность $\phi(\sigma)$ выбирается так, что ее график поочередно посещает сектор устойчивости, сектор неустойчивости степени 2 и второй сектор линейной устойчивости. Потом построенная нелинейность заменяется периодической функцией периода $\Delta = 2\sigma_0$. Полученная после такой замены система имеет 1-D сеть скрытых идентичных хаотических аттракторов.

Продемонстрируем реализацию описанного сценария на конкретном примере. Рассмотрим систему (1) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -19 \\ -3.5 \\ -3.2 \end{pmatrix}.$$

Для этой системы сектор $(-\infty, 0)$ – сектор неустойчивости степени 1, сектор $(0, 0.08842)$ – сектор линейной устойчивости, сектор $(0.08843, 1.00979)$ – сектор неустойчивости степени 2, наконец, сектор $(1.0098, +\infty)$ – сектор линейной устойчивости. В качестве нелинейности выберем функцию $\phi(\sigma) = 1.5 \operatorname{atan}(\sigma) - 0.27\sigma$. Оказывается, что в рассматриваемом случае система (1) имеет пару скрытых хаотических аттракторов-близнецов, которые были обнаружены с помощью процедуры поиска скрытых аттракторов, предложенной в работе [19] и представлены на рисунке 3. На рисунке 4 представлена проекция на плоскость (x_1, x_2)

фрагмента 1-D сети скрытых хаотических аттракторов системы, полученной после замены нелинейности $\phi(\sigma)$ на функцию периода $\Delta = 16.0854$.

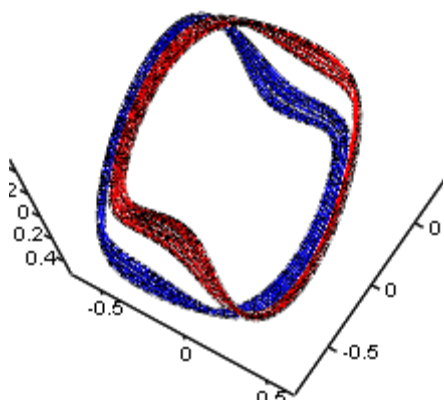


Рисунок 3. Скрытые хаотические аттракторы-близнецы системы (1).

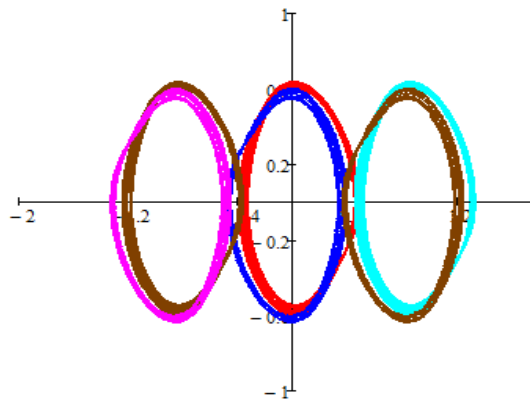


Рисунок 4. Проекция на плоскость (x_1, x_2) фрагмента 1-D сети скрытых хаотических аттракторов-близнецов.

Точки, принадлежащие скрытым аттракторам 1-D сети, представленной на рисунке 4, находились следующим образом. Пусть x_0 – точка на аттракторе системы (1), s – собственный вектор матрицы A , соответствующий ее нулевому собственному значению. Положим $d = \Delta s (c^* s)^{-1}$. Тогда точки $x_j = x_0 + jd, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ принадлежат аттракторам 1-D сети.

4. Генерирование систем с 2-D сетью хаотических аттракторов

Ясно, что продемонстрированный поход не может быть использован для генерирования на основе системы (1) экстремально мультистабильной системы, обладающей сетью скрытых аттракторов размерностью большей, чем 1. В работах [14,15] рассмотрен другой класс систем, позволяющих производить смещение фазового потока путем сдвига по переменным (offset boostable systems). Речь идет о системах каскадного типа вида

$$\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = f(\dot{x}, \dot{y}, x). \tag{6}$$

Сдвиг по переменным y и z в системе (6) может быть осуществлен путем введения дополнительных констант в её первые два уравнения. В самом деле, заменяя $x \rightarrow \tilde{x}, y \rightarrow \tilde{y} + m, z \rightarrow \tilde{z} + n$, приходим к системе

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{y} + m, \dot{\tilde{y}} = \tilde{z} + n, \dot{\tilde{z}} = f(\dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, \tilde{x}). \tag{7}$$

Легко видеть, что выполненное преобразование системы осуществляет смещение фазового потока системы (6) по переменным y, z , оставляя неизменной динамику переменной $\tilde{x} = x$, поскольку динамика этой переменной подчиняется тому же самому уравнению (6). Очевидно, сдвиг можно осуществить отдельно по любой из указанных переменных. Если в системе (7) переменные y и z заменить периодическими функциями $G(y), R(z)$ и при этом полученная система имеет аттрактор, то, как нетрудно убедиться [15] она имеет бесконечную 2-D сеть идентичных аттракторов. Для систем, не являющихся системами каскадного типа (систем в интерактивном режиме[14]), процедура введения периодических функций, позволяющая построить систему, содержащую многомерную сеть аттракторов, оказывается намного сложнее. Такая процедура может существенно менять динамику системы и приводить к разрушению ее аттракторов.

В настоящем разделе мы покажем, что многомерная модель системы автоматического регулирования (1) в форме Лурье всегда может быть приведена с помощью неособого линейного преобразования к системе каскадного типа. Последнее обстоятельство позволяет, в частности, использовать многие известные результаты, связанные с существованием самовозбуждающихся или скрытых аттракторов у систем вида (1) [20,21], для генерирования

экстремально мультистабильных систем. Хорошо известно следующее утверждение [18]: "Две системы вида (1) с одной и той же передаточной функцией эквивалентны с точностью до неособого линейного преобразования их координат". Если $\chi(p) = (\alpha p^2 + \beta p + \gamma)(p^3 + mp^2 + rp + l)^{-1}$, то, как показано, в [18] система (1) неособым преобразованием $x = My$ может быть приведена к виду

$$\dot{y} = A_1 y + b_1 \phi(\sigma), \sigma = c_1^* y, \tag{8}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -l & -r & -m \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} -\gamma \\ -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix}. \tag{9}$$

При этом матрица преобразования M может быть найдена из системы уравнений

$$AM = A_1 M, b = Mb_1, c_1 = M^T c \tag{10}$$

Система (8)-(9) является системой каскадного типа. Если система (1) имела аттрактор, то и система (8)-(9), очевидно, также имеет аттрактор, который можно попытаться "клонировать", вводя в систему периодические функции. Тем самым можно попытаться построить экстремально мультистабильную систему, содержащую 2-D сеть аттракторов.

Проиллюстрируем реализацию описанной идеи на примере рассмотренной в работе [14] системы, для которой известен факт существования хаотического аттрактора. Речь идет о системе вида (1) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.26 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1.64 & -0.7264 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В работе [14] указано, что рассматриваемая система имеет хаотический аттрактор, который может быть визуализирован численно при старте вычислительной процедуры из точки $q = col(-0.1, 0, -0.25)$. Здесь $\chi(p) = (1 - p^2)(p^3 - 0.7264p^2 + 0.64p - 0.3)^{-1}$. Поэтому неособым линейным преобразованием эта система может быть приведена к виду

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = 0.3x - 0.64y - 0.7264z + (z - x)^2. \tag{11}$$

Найдя матрицу M из соотношений (10) и умножив матрицу M^{-1} на вектор q , находим точку $q_1 = col(0.10725011, -0.02788503, 0.14274989)$. Стартуя из этой точки, вычислительная процедура выходит на странный аттрактор системы (11), проекция которого на плоскость (y, z) представлена на рисунке 5.

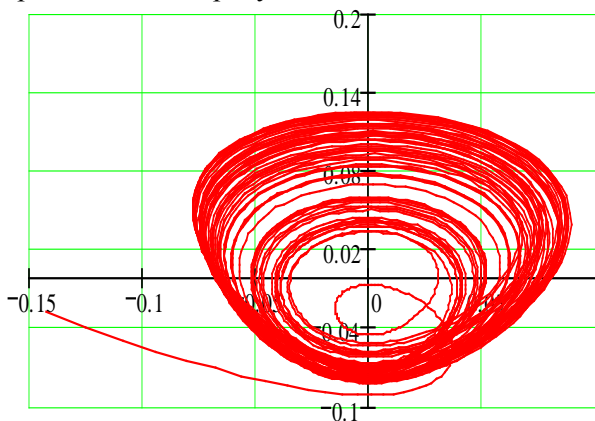


Рисунок 5. Аттрактор системы (11).

Заменим теперь в системе (11) переменные y и z на периодические функции $y \rightarrow 0.125 \sin(8y), z \rightarrow 0.125 \sin(8z)$.

Если полученная таким образом система имеет хаотический аттрактор, то, как было сказано выше, она имеет бесконечную 2-D сеть идентичных аттракторов-клонов. Численный эксперимент показывает, что описанный сценарий в данном случае реализуется. Проекция фрагмента сети идентичных аттракторов новой системы на плоскость (y, z) представлена на рисунке 6.

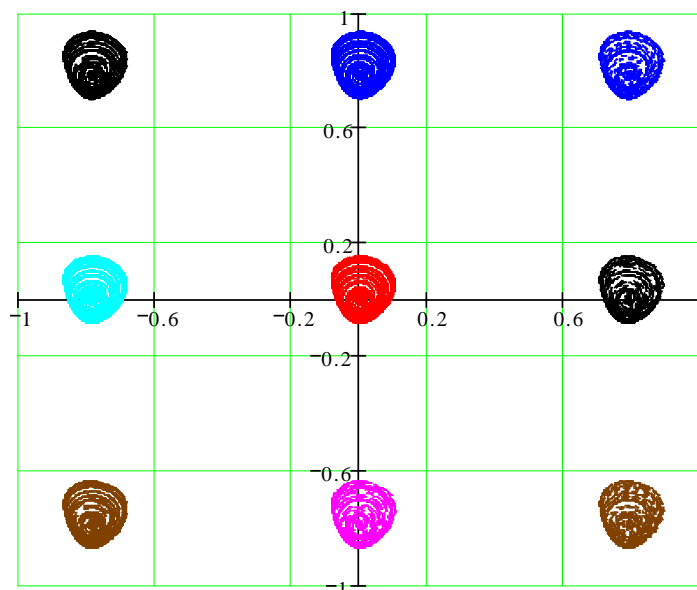


Рисунок 6. 2-D сеть хаотических аттракторов системы (11) после введения периодических функций.

4. Заключение

Метод построения бесконечных сетей аттракторов может быть применен в инженерных приложениях таких, как безопасная связь и обнаружение слабых сигналов, когда начальные условия принципиально важны для определения динамики системы. В коммуникациях, базирующихся на использовании хаоса, непредсказуемость начальных условий может дополнительно повысить безопасность связи [22]. Хаос также имеет потенциальное применение при обнаружении слабого сигнала, поскольку хаотические системы чувствительны к определенным сигналам и в то же время невосприимчивы к шуму, а мультистабильность с бесконечным числом аттракторов обеспечивает возможность перемежающихся переходов между порядком и хаосом, которые полезны для обнаружения слабого сигнала [23].

В настоящей работе обсуждаются различные подходы к генерированию экстремально мультистабильных систем, содержащих бесконечные сети скрытых аттракторов. Особое внимание уделено многомерным моделям систем управления в форме Лурье. Обсуждаются методы преобразования таких систем, позволяющие путем выбора специального базиса приводить их к системам каскадного типа, смещаемым по переменным. Таким образом, открывается возможность, используя многочисленные примеры существования скрытых аттракторов у систем в форме Лурье, генерировать системы с бесконечной сетью скрытых аттракторов, не прибегая при этом к исчерпывающему компьютерному поиску.

5. Литература

- [1] Li, C. Multistability in the Lorenz system: a broken butterfly / C. Li, J.C. Sprott // *Int. J. Bifurc. Chaos.* – 2014. – Vol. 24(10). – P. 1450131.
- [2] Li, C. Multistability in symmetric chaotic systems / C. Li, W. Hu, J.C. Sprott, X. Wang // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* – 2015. – Vol. 224. – P. 1493-1506.
- [3] Bao, B. Multistability in Chua's circuit with two stable node-foci / B. Bao, Q. Li, N. Wang, Q. Xu // *Chaos.* – 2016. – Vol. 26(4). – P. 043111.
- [4] Xu, Q. Multiple attractors in a non-ideal active voltage-controlled memristor based Chua's circuit / Q. Xu, Y. Lin, B. Bao, M. Chen // *Chaos Solitons Fract.* – 2016. – Vol. 83. – P. 186-200.
- [5] Lai, Q. Research on a new 3-D autonomous chaotic system with coexisting attractors / Q. Lai, S. Chen // *Optik.* – 2016. – Vol. 127. – P. 3000-3004.

- [6] Lai, Q. Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system / Q. Lai, S. Chen // *Int. J. Bifurc. Chaos.* – 2016. – Vol. 26. – P. 1650177.
- [7] Ujjwal, S.R. Driving-induced multistability in coupled chaotic oscillators: symmetries and riddled basins / S.R. Ujjwal, N. Punetha, R. Ramaswamy, M. Agrawal, A. Prasad // *Chaos.* – 2016. – Vol. 26. – P. 063111
- [8] Буркин, И.М. Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконечным числом состояний равновесия / И.М. Буркин // *Чебышевский сборник.* – 2017. – Т. 18, № 4. – С. 127-138.
- [9] Cicek, S. A new 3D chaotic system: dynamical analysis, electronic circuit design, active control synchronization and chaotic masking communication application / S. Cicek, A. Ferikoglu, I. Pehlivan // *Optik.* – 2016. – Vol. 127. – P. 4024-4030.
- [10] Liu, H. Audio encryption scheme by confusion and diffusion based on multi-scroll chaotic system and one-time keys / H. Liu, A. Kadir, Y. Li // *Optik.* – 2016. – Vol. 127. – P. 7431-7438.
- [11] Li, C. Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system / C. Li, J.C. Sprott, W. Hu, Y. Xu // *Int. J. Bifurc. Chaos.* – 2017. – Vol. 27(10). – P. 1750160.
- [12] Bao, B. Extreme multistability in a memristive circuit / B. Bao, Q. Xu, H. Bao, M. Chen // *Electron. Lett.* – 2016. – Vol. 52. – P. 1008-1010.
- [13] Bao, B. Hidden extreme multistability in memristive hyperchaotic system / B. Bao, H. Bao, N. Wang, M. Chen, Q. Xu // *Chaos Solit. Fract.* – 2017. – Vol. 94. – P. 102-111.
- [14] Li, C. An infinite 2-D lattice of strange attractors / C. Li, J.C. Sprott, Y. Mei // *Nonlinear Dynamics.* – 2017. – Vol. 89(4). – P. 2629-2639.
- [15] Li, C. Infinite lattice of hyperchaotic strange attractors / C. Li, J.C. Sprott, T. Kapitaniak, T. Lu // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2018. – Vol. 109. – P. 76-82.
- [16] Leonov, G.A. Localization of hidden Chua's attractors / G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov, V.I. Vagaitsev // *Phys Lett. A.* – 2011. – Vol. 375. – P. 2230-2233.
- [17] Burkin, I.M. The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems / I.M. Burkin // *Diff. Equations.* – 2002. – Vol. 38(5). – P. 615-625.
- [18] Леонов, Г.А. Теория управления / Г.А. Леонов. –Издательство С.-Петербургского государственного университета, 2006. – 233 с.
- [19] Burkin, I.M. Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems / I.M. Burkin, N.K. Nguen // *Diff. Equation.* – 2014. – Vol. 50. – P. 1695-1717.
- [20] Dudkowskia, D. Hidden attractors in dynamical systems / D. Dudkowskia, S. Jafari, T. Kapitaniak, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, A. Prasad // *Physics Reports.* – 2016. – Vol. 637. – P. 1-50.
- [21] Leonov, G.A. Frequency Methods in Oscillation Theory / G.A. Leonov, I.M. Burkin, A.I. Shepeljavyi. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. – 404 p.
- [22] Li, Z. A secure communication scheme using projective chaos synchronization / Z. Li, D. Xu // *Chaos Solitons Fract.* – 2004. – Vol. 22. – P. 477-478.
- [23] Wang, G. The application of chaotic oscillators to weak signal detection / G. Wang, D. Chen, J. Lin, X. Chen // *IEEE Trans. Ind. Electron.* – 1999. – Vol. 46. – P. 440-444.

On some methods for generating extremely multistable systems

I.M. Burkin¹, O.I. Kuznetsova¹

¹Tula State University, Lenin avenue 92, Tula, Russia, 300012

Abstract Multistability in a dynamical system poses a threat in practical engineering applications because the behavior of the system cannot be guaranteed, since the system may unpredictably visit its various solutions depending on the initial conditions. On the other hand, multistability of the system can be its indisputable advantage in the case when it is used, for example, to masking information in communication systems and audio encryption schemes to improve the performance of a secure connection, since in this case a special choice of initial conditions can play the role of the "secret key". The paper proposes some approaches to the generation of extremely multistable systems containing an infinite number of attractors using mathematical models of automatic control systems in the Lurie form.