

## Новый подход к расчету проводимости Капицы

В.И. Хвесьюк<sup>1</sup>, Б. Лю<sup>1</sup>, А.А. Баринев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), 2-я Бауманская 5, стр. 1, Москва, Россия, 105005

**Аннотация.** Одно из важных направлений в современной теории переноса тепла в наноструктурах является развитие методов расчёта так называемых сопротивлений Капицы. Данное явление заключается в возникновении скачка температур на поверхности контакта между различными материалами ( $T_1 - T_2$ ), который связан с тепловым потоком через коэффициент – проводимость Капицы. В этой работе для расчёта проводимости Капицы рассматривается модель акустического несоответствия (АММ), где перенос тепла в рассматриваемых материалах осуществляется упругими волнами. Задача заключается в расчёте рассеяния волн на поверхности раздела двух тел. В отличие от работ других авторов, данная работа базируется на современной теории отражения и проникновения акустических волн через границу твёрдое тело–жидкость и двух твёрдых тел. На основе предложенной модели получены новые результаты.

### 1. Введение

Обнаруженное Капицей явление контактного теплового сопротивления между телами [1] при протекании теплового потока проявляется в том, что на прилегающих поверхностях двух тел возникает скачок температур ( $T_1 - T_2$ ), который связан с тепловым потоком следующим образом:

$$q = \sigma_K (T_1 - T_2). \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_K$  – проводимость Капицы. Обратная величина называется сопротивлением Капицы:

$$h_K = \sigma_K^{-1}.$$

Это явление долгие годы представляло чисто научный интерес, не имея реального практического значения. Проблема существовала на периферии интересов научной общественности. Это связано с тем обстоятельством, что при рассмотрении контакт между макроскопическими телами с большой точностью принимается условие идеального теплового контакта – равенство температур на контактных поверхностях –, так как сопротивление Капицы в этом случае существенно меньше общего теплового сопротивления.

Однако, с возникновением нового направления теплофизики, связанного с изучением переноса тепла в наноструктурах, проблема изучения сопротивлений Капицы стала очень актуальной. Это связано с тем, что в наноразмерных системах данные сопротивления играют существенную, а иногда определяющую роль [2].

Существуют две модели сопротивлений Капицы. Первая модель – акустического несоответствия (АММ), ориентированная на ситуации, когда температуры контакта достаточно низкие. Вторая – диффузионного несоответствия (ДММ), работающая в области нормальных

(комнатных и выше) температур. Обе теории слабо разработаны. В данной работе обсуждается модель АММ.

Впервые модель АММ была предложена в работе Халатникова [3], где рассмотрены условия эксперимента Капицы [1], а именно перенос тепла между сверхтекучим гелием и медной стенкой сосуда, в котором находится жидкость. Идея модели основана на представлении, что перенос тепла между телами осуществляется упругими волнами, распространяющимися в твёрдом теле и жидкости. Перенос тепла определяется разностью тепловых потоков от жидкости к твёрдому телу ( $1 \rightarrow 2$ ) и в противоположную сторону ( $2 \rightarrow 1$ ):

$$q = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1}. \quad (2)$$

Главной проблемой при решении этой задачи является определение коэффициентов переноса тепла от одного тела к другому. Её решение требует анализа рассеяния волн на поверхности контакта тел.

В принципе, постановка задачи в работе [3] является грамотной. Можно отметить только следующие проблемы. Подробно рассматривается перенос тепла только со стороны гелия, в то время как формально учитывается взаимный перенос с обеих сторон. При этом не учитывается наличие критического угла. Перенос со стороны твёрдой стенки принимается подобным переносу со стороны гелия, что неверно хотя бы потому, что если в жидкости распространяются только продольные акустические волны, то в твердых телах продольные и поперечные. Это требует подробного рассмотрения потока тепла со стороны твёрдого тела к жидкому гелию, что не сделано. В результате этого, а также и того, что задача решалась, естественно, без использования современной вычислительной техники, расчёты показали существенные отличия теоретических предсказаний от экспериментальных данных.

Следующая работа, посвящённая решению данной проблемы – статья [4]. Хорошее изложение этой работы представлено в [5]. В этой работе рассматривается перенос тепла между двумя твёрдыми телами. Это, пожалуй, единственное преимущество её по сравнению с [3]. Главные величины – коэффициенты переноса тепла – представлены без вывода, со ссылкой на известную книгу Рэля, в которой найти подобные формулы не удаётся. Отношения этих величин для переходов ( $1 \rightarrow 2$ ) к ( $2 \rightarrow 1$ ), согласно этим формулам, равны  $(v_{1l} / v_{2l})^2$ , где индекс  $l$  указывает на то, что учитываются только продольные волны, что неверно. В частности, теория приводит к тому, что при достаточно высоких температурах получается формула для теплового потока, которая предсказывает наличие теплообмена между двумя телами при равенстве их температур (формула (7.72) в [5]). Существует ряд работ, в которых для оценок используется именно версия работы [4]. Однако этот подход является ошибочным.

В данной работе используется версия модели АММ, основанная на использовании современной теории распространения волн через поверхности контакта твёрдых тел [6].

## 2. Описание модели

Важной особенностью обсуждаемой здесь модели является обязательный учёт всех типов волн, распространяющихся в твёрдых телах. В данном случае рассматриваются два полубесконечных тела, находящихся в тепловом контакте друг с другом. Для этих тел характерно наличие одной продольной и двух поперечных волн для каждого значения частоты  $\omega$ . В этих условиях необходимо учитывать тепловые потоки через контактную поверхность, переносимые, как продольными, так и поперечными волнами. Таким образом, мы должны записать отдельно уравнения тепловых потоков, переносимых продольными волнами

$$q^l = q_{1 \rightarrow 2}^l - q_{2 \rightarrow 1}^l \quad (3)$$

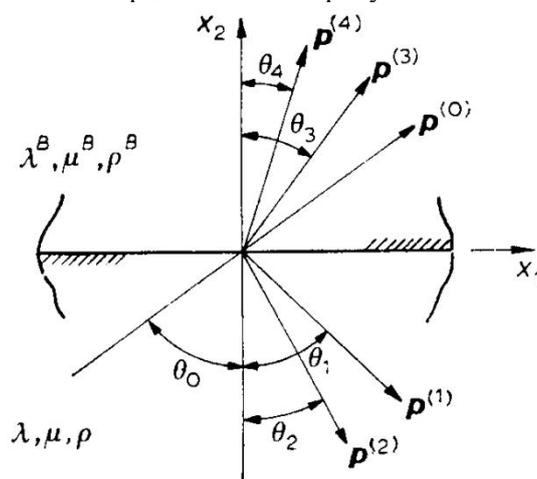
и поперечными волнами

$$q^t = q_{1 \rightarrow 2}^t - q_{2 \rightarrow 1}^t. \quad (4)$$

Необходимо иметь в виду, что существует два типа поперечных акустических волн, отличающиеся поляризацией, то есть направлением колебаний решётки твёрдого тела под действием этих волн [6]. Один тип – SH волны. Они поляризованы в направлении,

перпендикулярном плоскости падения исходной волны. Второй тип – SV волны, поляризованные в плоскости падения исходной волны. Таким образом, в общем случае для определения проводимости (сопротивления) Капицы необходим учёт рассеяния на контактной поверхности трёх типов акустических волн: одной продольной (P волна) и двух поперечных (SH и SV волны). Именно в такой постановке необходимо решать поставленную задачу. До сих пор так данная задача не решалась.

Рассматриваются плоские акустические волны, распространяющиеся в двух полубесконечных твёрдых телах, свойства которых определяются плотностью ( $\rho$  и  $\rho^B$ ), а также коэффициентами Ламе ( $\lambda, \mu$  и  $\lambda^B, \mu^B$ ). Эти тела разделены плоской контактной поверхностью, на которую под углом  $\theta_0$  к её нормали падает исходная волна. Общая картина рассеяния и проникновения продольной волны представлена на рисунке 1 из книги [6].



**Рисунок 1.** Падение продольной волны  $p^{(0)}$ , под углом  $\theta_0$ , её рассеяние: продольная волна  $p^{(1)}$ , поперечная волна  $p^{(2)}$ , преломлённые волны: продольная  $p^{(3)}$  и поперечная  $p^{(4)}$ .

Представленная картина рассеяния и преломления имеет место для падающей на контактную поверхность SV волны. Для SH волны картина значительно более простая: там присутствуют только отражённая и преломлённая SH волны. Таким образом, доля начальной волны, переносимой в другое тело, определяется отношениями амплитуд волн:  $(A_3 / A_0)$  и  $(A_4 / A_0)$  в случаях, когда падающими являются продольная или поперечная SV волна. Если это поперечная SH волна, то доля прошедшей волны по отношению к падающей волне составляет  $(A_4 / A_0)$ .

Далее необходимо определить знание доли энергии, переносимой волнами через контактную поверхность. Общий энергетический баланс, связанный с отражением от контактной поверхности и прохождением через неё записывается следующим образом:

$$\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \frac{c_T \cos \theta_2}{c_L \cos \theta_0} + \left(\frac{A_3}{A_0}\right)^2 \frac{c_L^B \cos \theta_3}{c_L \cos \theta_0} + \left(\frac{A_4}{A_0}\right)^2 \frac{c_T^B \cos \theta_4}{c_L \cos \theta_0} = 1 \tag{5}$$

Здесь  $c_L, c_T$  – скорости распространения продольной и поперечной волн, которые распространяются в первом теле, где существует исходная продольная волна. Соответствующие скорости волн во втором теле –  $c_L^B, c_T^B$ .

Заметим, что в выражении (5) величины  $\cos \theta_3, \cos \theta_4$  являются функциями от  $\theta_0$ , поэтому можно следующим образом записать коэффициент переноса энергии от тела 1 в тело 2 через контактную поверхность:

$$\Pi_{1 \rightarrow 2}(\theta_0) = \left(\frac{A_3}{A_0}\right)^2 \frac{c_L^B \cos \theta_3}{c_L \cos \theta_0} + \left(\frac{A_4}{A_0}\right)^2 \frac{c_T^B \cos \theta_4}{c_L \cos \theta_0} \quad (6)$$

где  $\cos \theta_3 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_L^B}{c_L}\right)^2 \sin^2 \theta_0}$  и  $\cos \theta_4 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_T^B}{c_L}\right)^2 \sin^2 \theta_0}$ .

Чтобы вычислить функцию (6), необходимо знать зависимости от  $\theta_0$  относительных значений амплитуд  $(A_1 / A_0)$ ,  $(A_2 / A_0)$ ,  $(A_3 / A_0)$  и  $(A_4 / A_0)$ . Они получаются в результате решения соответствующей системы четырёх уравнений:

$$A_0 \sin \theta_0 + A_1 \sin \theta_1 + A_2 \cos \theta_2 - A_3 \sin \theta_3 + A_4 \cos \theta_4 = 0, \quad (7)$$

$$A_0 \cos \theta_0 - A_1 \cos \theta_1 + A_2 \sin \theta_2 - A_3 \cos \theta_3 - A_4 \sin \theta_4 = 0, \quad (8)$$

$$A_0 \sin(2\theta_0) - A_1 \sin(2\theta_1) - A_2 \frac{c_L}{c_T} \cos(2\theta_2) - A_3 \frac{\mu^B}{\mu} \frac{c_L}{c_L^B} \sin(2\theta_3) + A_4 \frac{\mu_B}{\mu} \frac{c}{c_T^B} \cos(2\theta_4) = 0 \quad (9)$$

$$A_0 \frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_0}{\mu} + A_1 \frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_1}{\mu} - A_2 \frac{c_L}{c_T} \sin(2\theta_2) - A_3 \frac{c_L}{c_L^B} \frac{\lambda^B + 2\mu^B \cos^2 \theta_3}{\mu} - A_4 \frac{\mu^B}{\mu} \frac{c_L}{c_T^B} \sin(2\theta_4) = 0 \quad (10)$$

Первые два уравнения, (7) и (8), представляют условие неразрывности деформаций на контактной поверхности, другие два, (9) и (10), – условие неразрывности напряжений на контактной поверхности.

Теперь мы можем записать выражение для теплового потока, переносимого акустическими волнами из тела 1 в тело 2 (предполагается, что  $c_l < c_l^B$ ):

$$q_{1 \rightarrow 2}^l = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{cr}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\omega_{m1}} \hbar \omega c_l f_1(\omega, T_1) D(\omega) \Pi_{1 \rightarrow 2}(\theta_0) \cos \theta_0 \sin \theta_0 d\theta_0 d\phi d\omega \quad (11)$$

Здесь  $f_1(\omega, T_1)$  – функция распределения Бозе–Эйнштейна фононов в первом теле,

$D(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c_l^3}$  – плотность состояний фононов. Отдельно вычисляется интеграл

$$\Gamma_{1 \rightarrow 2}(\theta_{cr}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{cr}} \int_0^{2\pi} \Pi_{1 \rightarrow 2}(\theta_0) \cos \theta_0 \sin \theta_0 d\theta_0 d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_{cr}} \Pi_{1 \rightarrow 2}(\theta_0) \cos \theta_0 \sin \theta_0 d\theta_0 \quad (12)$$

Таким образом, получаем

$$q_{1 \rightarrow 2}^l = \Gamma_{1 \rightarrow 2}(\theta_{cr}) \int_0^{\omega_{m1}} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{2\pi^2 c_l^2 \left[ \exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T_1}\right) - 1 \right]} = \frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}(\theta_{cr}) k_B^4}{2\pi^2 c_l^2 \hbar^3} T_1^4 \int_0^{\omega_{m1}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (13)$$

Аналогично представляется выражение для  $q_{2 \rightarrow 1}^l$ . Итоговое выражение для  $q^l$  согласно (3) принимает вид:

$$q^l = \frac{k_B^4}{2\pi^2 \hbar^3} \left[ \frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}(\theta_{cr})}{c_l^2} T_1^4 \int_0^{\omega_{m1}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{\Gamma_{2 \rightarrow 1}(\pi/2)}{(c_l^B)^2} T_2^4 \int_0^{\omega_{m2}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \right] \quad (14)$$

Заметим, что при  $T_1 = T_2$  должно выполняться

$$\frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}(\theta_{cr})}{c_l^2} \int_0^{\omega_{m1}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\Gamma_{2 \rightarrow 1}(\pi/2)}{(c_l^B)^2} \int_0^{\omega_{m2}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (15)$$

В пределе низких температур, когда верхние пределы интегралов равны бесконечности, условие (15) принимает вид:

$$\frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}(\theta_{cr})}{c_l^2} = \frac{\Gamma_{2 \rightarrow 1}(\pi/2)}{(c_l^B)^2} \quad (16)$$

В этом пределе соответствующие интегралы соотношения (15) равны  $\pi^4/15$ . Учитывая это, а также то, что вклад продольных волн составляет 1/3 (функция распределения предполагает, что все волны, или фононы – продольные). Поэтому результат необходимо умножить на 1/3. В итоге проводимость Капицы, связанная с продольными акустическими волнами, равна:

$$\sigma_K^l = \frac{1}{3} \frac{\pi^2 k_B^4}{30 \hbar^3} \frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}(\theta_{cr})}{c_l^2} T^3 \quad (17)$$

Аналогично можно получить выражение для поперечной проводимости  $\sigma_K^t$ . Искомая величина проводимости Капицы равна

$$\sigma_K = \sigma_K^l + \sigma_K^t \quad (18)$$

На этом расчёт проводимости Капицы завершается.

### 3. Заключение

В данной работе представлен метод расчёта проводимости Капицы в рамках модели АММ. Метод основан на анализе рассеяния акустических волн на контактной поверхности двух различных материалов. Метод принципиально отличается от используемого сейчас метода, развитого в [5, 6]. Он включает последовательность следующих шагов. Сначала находится решение системы уравнений, позволяющей определить амплитуды, как рассеянных контактной поверхностью волн, так и волн, прошедших через неё и преломлённых в следующем материале. Следует подчеркнуть, что определяются зависимости величин этих амплитуд от угла падения исходной волны на контактную поверхность. Затем проводится расчёт распределения энергии между рассеянными и преломлёнными волнами, и определение коэффициента переноса энергии волны через контактную поверхность. При этом рассматривается, как рассеяние продольных волн, так и поперечных волн – задача, которая до сих пор не формулировалась в данной постановке. После этого определяются тепловые потоки, переносимые акустическими волнами через контактную поверхность, на основе чего получается величина проводимости Капицы.

### 4. Литература

- [1] Kapitza, P.L. The Study of Heat Transfer in Helium II // J. Phys. USSR. – 1941. – Vol. 4. – P. 181.
- [2] Khvesyuk, V.I. Heat Conduction in Multilayer Nanostructures // Tech. Phys. Let. – 2016. – Vol. 42(10). – P. 985-987.
- [3] Халатников, И.М. Теплообмен между твердым телом и гелием-II // ЖЭТФ. – 1952. – Т. 22(6). – С. 687-704.
- [4] Little, W.A. The transport of heat between dissimilar solids at low temperatures // Can. J. Phys. – 1959. – Vol. 37(3). – P. 334-349.
- [5] Zhang, Z.M. Nano/Microscale Heat Transfer. – N.Y.: Mc Grow Hill, 2007. – 479 p.
- [6] Achenbach, J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. – N.Y.: American Elsevier Pub. Co., 1973. – 425 p.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект 16.8107.2017 / 6.7.

## A new look at Kapitza conductance calculations for various materials

V.I. Khvesyuk<sup>1</sup>, B. Liu<sup>1</sup>, A.A. Barinov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, 2nd Baumanskaya Street 5, Moscow, Russia, 105005

**Abstract.** One of the most important tasks of modern theory of heat transfer in nanostructures is the development of methods for calculating the so-called Kapitza resistance. This phenomenon is appearance to a temperature jump on the contact surface between different materials. In this paper, we consider an acoustic mismatch model (AMM) to calculate the Kapitza conductance. The original idea of the AMM is the heat in both materials is transferred by elastic waves; there calculation of wave scattering at the interface of two bodies is needed. This work is based on the modern theory of reflection and refraction of acoustic waves across the solid – liquid or two solids boundary. New interesting data are obtained.