

# Новые алгоритмы дискретной фильтрации на основе MWGS-ортогонализации для систем с мультипликативными и аддитивными шумами

А.В. Цыганов  
Ульяновский государственный  
педагогический университет  
им. И.Н. Ульянова  
Ульяновск, Россия  
andrew.tsyganov@gmail.com

Ю.В. Цыганова  
Ульяновский государственный  
университет  
Ульяновск, Россия  
tsyganovajv@gmail.com

А.Н. Кувшинова  
Ульяновский государственный  
педагогический университет  
им. И.Н. Ульянова  
Ульяновск, Россия  
kuvanulspu@yandex.ru

Т.Н. Куренева  
Ульяновский государственный  
педагогический университет  
им. И.Н. Ульянова  
Ульяновск, Россия  
tankur67@yandex.ru

**Аннотация**—В работе рассматривается задача дискретной фильтрации источника данных, моделируемого линейной стохастической системой в пространстве состояний с мультипликативными и аддитивными шумами. Предложен новый класс алгоритмов дискретной фильтрации, основанный на модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта (MWGS-ортогонализации). Подробно описаны подходы к построению, основные характеристики, достоинства и недостатки алгоритмов. Приведен численный пример их применения для решения задачи дискретной фильтрации.

**Ключевые слова**— стохастические системы с мультипликативными шумами, дискретная фильтрация, MWGS-ортогонализация, блочно-матричные алгоритмы.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретные линейные стохастические системы с аддитивными и мультипликативными шумами применяются для решения широкого круга практических задач, связанных с обработкой измерительной информации и фильтрацией данных (например, обработка изображений и сигналов, сетевые технологии, финансовая математика, авионавтика и др.).

Разработка численно эффективных алгоритмов дискретной фильтрации для указанных систем является актуальной и важной задачей, решение которой позволяет получить надежные в вычислительном плане алгоритмы. Одним из подходов к решению является применение вычислительной модели алгоритмов фильтрации, основанной на MWGS-ортогонализации.

Целью данной работы является разработка и теоретическое обоснование нового класса алгоритмов ковариационной и информационной фильтрации данных, моделируемых дискретной стохастической системой с мультипликативными и аддитивными шумами, основанных на едином подходе к обработке данных — MWGS-ортогонализации.

## 2. НОВЫЙ КЛАСС АЛГОРИТМОВ НА ОСНОВЕ MWGS-ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему:

$$\begin{cases} x_k = (F_{k-1} + \tilde{F}_{k-1}\xi_{k-1})x_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, \\ z_k = (H_k + \tilde{H}_k\zeta_k)x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где  $w_k$  и  $v_k$  — аддитивные гауссовские шумы,  $\xi_k$  и  $\zeta_k$  — мультипликативные гауссовские шумы.

Стандартные алгоритмы дискретной фильтрации калмановского типа для рассматриваемых систем известны (см, например, [1,2]). В недавней работе [3] предложен общий подход к построению MWGS-алгоритмов для систем с аддитивными шумами. В данной работе мы развиваем полученные в [3] результаты для более широкого класса систем с мультипликативными и аддитивными шумами. При построении алгоритмов были использованы два типа MWGS-ортогонализации: *прямая* процедура, основанная на  $LDL^T$ -разложении блочной матрицы  $A$  с учетом блочно-диагональной весовой матрицы  $D_A$  и *обратная* процедура, основанная на  $UDU^T$ -разложении блочной матрицы  $A$  с учетом блочно-диагональной весовой матрицы  $D_A$ .

Теоретическое обоснование каждого алгоритма основано на доказательстве его алгебраической эквивалентности стандартным алгоритмам ковариационного и информационного типа. В качестве примера в работе приведена схема доказательства алгоритмов eUD-CF-TM и eUD-IF-TM. Также приведены результаты компьютерного моделирования на языке MATLAB.

В таблице 1 приведен список MWGS-алгоритмов и их основные характеристики. Все алгоритмы являются блочно-матричными. Характеристика “Тип” (расширенный/обычный) указывает на способ вычисления оценок вектора состояния (в едином блочном массиве или в отдельном матричном выражении).

## 3. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим модель почти равномерного прямолинейного движения объекта с мультипликативными шумами в объекте и измерителе и плохо обусловленной схемой измерений:

$$\begin{cases} x_k = \left( \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_{k-1} \right) x_{k-1} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} w_{k-1}, \\ z_k = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta_k \right) x_k + v_k, \end{cases}$$

$x_0 \sim N([0, 1]^T, 10I_2)$ ,  $w_k \sim N(0, 10^{-2})$ ,  $v_k \sim N(0, \delta^2 I_2)$ ,  $\xi_k \sim N(0, 10^{-5})$ ,  $\zeta_k \sim N(0, \delta^2)$ , где  $\delta$  — параметр, моделирующий влияние ошибок машинного округления.

ТАБЛИЦА 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ MWGS-АЛГОРИТМОВ

Алгоритм	Форма, тип	Разложение	Этапы
(UD/LD)-CF-TM	Ковариационная, обычный	$UDU^T/LDL^T$	Экстраполяция + фильтрация
(UD/LD)-CF	Ковариационная, обычный	$UDU^T/LDL^T$	Совмещенный
e(UD/LD)-CF-TM	Ковариационная, расширенный	$UDU^T/LDL^T$	Экстраполяция + фильтрация
e(UD/LD)-CF	Ковариационная, расширенный	$UDU^T/LDL^T$	Совмещенный
(UD/LD)-IF-TM	Информационная, обычный	$UDU^T/LDL^T$	Экстраполяция + фильтрация
(UD/LD)-IF	Информационная, обычный	$UDU^T/LDL^T$	Совмещенный
e(UD/LD)-IF-TM	Информационная, расширенный	$UDU^T/LDL^T$	Экстраполяция + фильтрация
e(UD/LD)-IF	Информационная, расширенный	$UDU^T/LDL^T$	Совмещенный

Покажем на численных экспериментах преимущества предложенных алгоритмов в плане численной устойчивости по отношению к ошибкам машинного округления. Проведем сравнительный анализ эффективности следующих алгоритмов [2]: стандартного фильтра Калмана в ковариационной форме (CF), двух модификаций информационного фильтра (IF<sub>1</sub> и IF<sub>2</sub>), а также двух расширенных UD-фильтров (eUD-CF-TM и eUD-IF-TM) для различных значений параметра  $\delta$  (число измерений  $N = 1000$ ).

В таблице 2 приведены результаты численных экспериментов в системе MATLAB. Здесь  $RMSE(x_1)$ ,  $RMSE(x_2)$  — среднеквадратические ошибки оценивания вектора состояния по  $x_1$  и  $x_2$  соответственно,  $nRMSE = \|\mathbf{RMSE}(x)\|_2$ . Из приведенных результатов видно, что при  $\delta = 10^{-6}$  все алгоритмы показывают примерно одинаковые результаты, при  $\delta = 10^{-7}$  ошибки обычных информационных фильтров (IF<sub>1</sub> и IF<sub>2</sub>) начинают возрастать.

Случай  $\delta = 10^{-8}$  соответствует ситуации, когда  $\delta^2 < \epsilon_{\text{roundoff}}$ , но  $\delta > \epsilon_{\text{roundoff}}$ ,  $\epsilon_{\text{roundoff}}$  — машинный эпсилон. В данных условиях фильтры CF, IF<sub>1</sub> и IF<sub>2</sub> начинают расходиться, в то время как фильтры eUD-CF-TM и eUD-IF-TM продолжают стабильно работать.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый класс алгоритмов дискретной фильтрации для линейных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.

Все алгоритмы основаны на едином подходе к обработке данных — MWGS-ортогонализации. Подробно описаны основные характеристики алгоритмов, их достоинства и недостатки. Теоретическое обоснование предложенных алгоритмов основано на доказательстве их алгебраической эквивалентности существующим стандартными алгоритмам ковариационного и информационного типа. На численном примере показаны преимущества предложенных алгоритмов в сравнении со стандартными в плане организации вычислений и численной устойчивости к ошибкам машинного округления.

ТАБЛИЦА 2. ОШИБКИ RMSE

$\delta = 10^{-6}$			
	RMSE(x <sub>1</sub> )	RMSE(x <sub>2</sub> )	nRMSE
CF	0.0520	0.0520	0.0736
IF <sub>1</sub>	0.0517	0.0517	0.0732
IF <sub>2</sub>	0.0521	0.0521	0.0736
eUD-CF-TM	0.0520	0.0520	0.0736
eUD-IF-TM	0.0520	0.0520	0.0736
$\delta = 10^{-7}$			
	RMSE(x <sub>1</sub> )	RMSE(x <sub>2</sub> )	nRMSE
CF	0.0519	0.0519	0.0734
IF <sub>1</sub>	0.1518	0.1518	0.2146
IF <sub>2</sub>	0.2094	0.2094	0.2961
eUD-CF-TM	0.0520	0.0520	0.0736
eUD-IF-TM	0.0520	0.0520	0.0736
$\delta = 10^{-8}$			
	RMSE(x <sub>1</sub> )	RMSE(x <sub>2</sub> )	nRMSE
CF	NaN	NaN	NaN
IF <sub>1</sub>	Inf	Inf	Inf
IF <sub>2</sub>	NaN	NaN	NaN
eUD-CF-TM	0.0520	0.0520	0.0736
eUD-IF-TM	0.0520	0.0520	0.0736

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–21–00387, <https://rscf.ru/project/22-21-00387/>.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wu, Y. Kalman filtering with multiplicative and additive noises / Y. Wu, Q. Zhang, Z. Shen // Proc. of the 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). – 2016. – P. 483–487. DOI: 10.1109/WCICA.2016.7578352.
- [2] Tsyganov, A.V. UD-based Linear Filtering for Discrete-Time Systems with Multiplicative and Additive Noises / A.V. Tsyganov, J.V. Tsyganova, T.N. Kureneva // Proc. of the 19th European Control Conference. – 2020. – P. 1389–1394. DOI: 10.23919/ECC51009.2020.9143804.
- [3] Tsyganova, J.V. A general approach for designing the MWGS-based information-form Kalman filtering methods / J.V. Tsyganova, M.V. Kulikova, A.V. Tsyganov // European Journal of Control. – 2020. – Vol. 56. – P. 86–97. DOI: 10.1016/j.ejcon.2020.02.001.